Métodos de Zeros da Função

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Métodos Iterativos para a Obtenção de Zeros Reais de Funções**
  - ***Bissecção***
  - ***Falsa Posição***
  - ***Falsa Posição Modificado***
  - ***Ponto Fixo***
  - ***Newton-Raphson***
  - ***Secante***

2

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Método da *Bissecção***

Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar tal raiz subdividindo sucessivas vezes o intervalo que a contém pelo ponto médio de a e b.

3

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Definição do Intervalo Inicial**
  - **Atribui-se *[a,b]* como *intervalo inicial***
    - $a_0 = a$
    - $b_0 = b$
  - **Condições de Aplicação**
    - $f(a)*f(b) < 0$
    - **Sinal da derivada *constante***

4

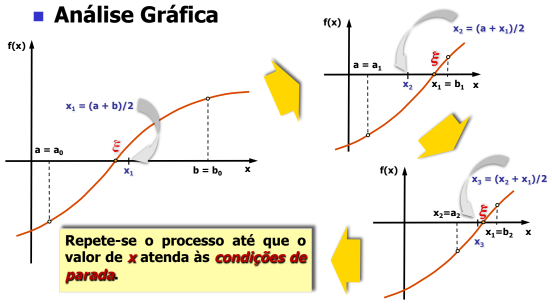
Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Definição de Novos Intervalos**
  - **Determina-se qual o subintervalo – $[a , x_1]$ ou $[x_1 , b]$ – que contém a *raiz***
    - **Calcula-se o produto $f(a)*f(x_1)$**
    - **Verifica-se se $f(a)*f(x_1) < 0$**
      - **Se *verdadeiro* $\Rightarrow \xi \in (a, x_1)$**
        (Logo a = a e b = x_1)
      - ***Caso contrario* $\Rightarrow \xi \in (x_1 , b)$**
        (Logo a = x_1 e b = b)
  - **Repete-se o processo até que o valor de x atenda às *condições de parada*.**

5

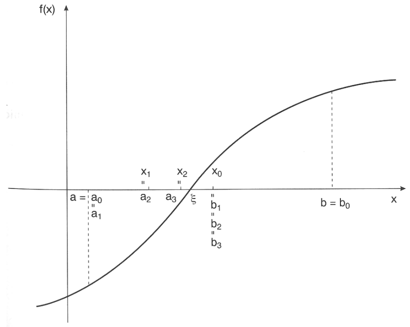
Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Análise Gráfica**



6

Método da Bissecção ou Dicotomia (Graficamente)



Cálculo Numérico – **Bissecção**

- ***Tolerância*** (ε)
  - Aproximação de zero, dependente do equipamento utilizado e da precisão necessária para a solução do problema

A *tolerância* é uma estimativa para o *erro absoluto* desta aproximação.

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- ***Tolerância*** (ε)
  - **Considerando** $\left|\xi - x_{n+1}\right| < \left|\left(\dfrac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}\right)\right|$:

    deve-se escolher *n* tal que:

$$\left|\left(\frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}\right)\right| < \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\dfrac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)} - 1$$

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Cálculo Numérico – **Bissecção**

- **Condições de Parada**
  - **Se os valores fossem *exatos***
    - $f(x) = 0$
    - $(x_k - x_{k+1})/x_k = 0$
  - **Uma vez que são *aproximados***
    - $|f(x)| \leq$ *tolerância*
    - $|(x_k - x_{k+1})/x_k| \leq$ *tolerância*

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Algoritmo

```
k := 0; a0 := a; b0 := b; x0 := a;
xk+1 := (ak + bk)/2;
while critério de parada não satisfeito and k ≤ L
   if f(ak)f(xk+1) < 0 then /* raiz em [ak , xk+1] */
      ak+1 := ak; bk+1 := xk+1;
   else /* raiz em [xk+1, bk] */
      ak+1 := xk+1; bk+1 := bk;
   endif
   k := k +1; xk+1 := (ak + bk)/2;
endwhile
if k > L
    parada falhou
endif
```


Cálculo Numérico – **Bissecção**

Vantagens:

- **Facilidade de implementação;**
- **Estabilidade e convergência para a solução procurada;**
- **Desempenho regular e previsível.**

O número de interações é *dependente* da *tolerância* considerada

Cálculo Numérico – **Bissecção**

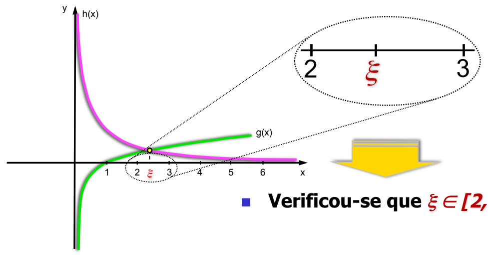
Desvantagens:

- **Lentidão do processo de convergência (requer o cálculo de *f(x)* em um elevado número de iterações);**
- **Necessidade de conhecimento prévio da região na qual se encontra a raiz de interesse (o que nem sempre é possível);**
- **Complexidade da extensão do método para problemas multivariáveis.**

13

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06: Resgatando o Exemplo 05, *f(x) = xlogx - 1* $\varepsilon = 0{,}002$



- **Verificou-se que $\xi \in [2, 3]$**

14

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06: *f(x) = xlogx - 1*

Considerando o *método da bissecção com tol = 0,002* e adotando $[a_0, b_0] = [2, 3]$ como *intervalo inicial*, tem-se:

- **Cálculo da 1ª aproximação**
  - $x_1 = (a_0 + b_0)/2 = (2{,}00000 + 3{,}00000)/2 \Rightarrow$ $x_1 = 2{,}50000$
  - $f(x_1) = f(2{,}50000) = -0{,}00510$
  - $f(a_0) = f(2{,}00000) = -0{,}39794$
  - Teste de Parada
    - $|f(x_1)| = |-0{,}00510| = 0{,}00510 > 0{,}002$

15

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06: *f(x) = xlogx - 1*

- **Cálculo da 2ª aproximação**
  - Novo Intervalo
    - $f(a_0).f(x_1) = (-0{,}39794).(-0{,}00510) > 0$

      logo: $a_1 = x_1 = 2{,}50000$ e $b_1 = b_0 = 3{,}00000$
  - $x_2 = (2{,}50000 + 3{,}00000)/2 =$ $x_2 = 2{,}75000$
    - $f(2{,}50000) = -0{,}05100 < 0$
    - $f(3{,}00000) = 0{,}43140 > 0$
    - $f(2{,}75000) = 0{,}20820 > 0$
    - $\xi \in [2{,}5 ; 2{,}75]$

      $a_2 = a_1 = 2{,}50000$ e $b_2 = x_2 = 2{,}75000$

16

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06:

- $x_3 = (2{,}50000 + 2{,}75000)/2 = 2{,}62500$
  - $f(2{,}50000) = -0{,}05100 < 0$
  - $f(2{,}75000) = 0{,}20820 > 0$
  - $f(2{,}62500) = 0{,}10020 > 0$
  - $\xi \in [2{,}5 , 2{,}625]$

    $a_3 = a_2 = 2{,}50000$

    $b_3 = x_3 = 2{,}62500$
- $x_4 = (2{,}50000 + 2{,}62500)/2 = 2{,}56250$
  - $f(2{,}50000) = -0{,}05100 < 0$
  - $f(2{,}62500) = 0{,}10020 > 0$
  - $f(2{,}56250) = 0{,}04720 > 0$
  - $\xi \in [2{,}5 , 2{,}5625]$

    $a_3 = a_2 = 2{,}50000$

    $b_3 = x_4 = 2{,}56250$

⋮ ⋮ ⋮

17

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 06: *f(x) = xlogx - 1*

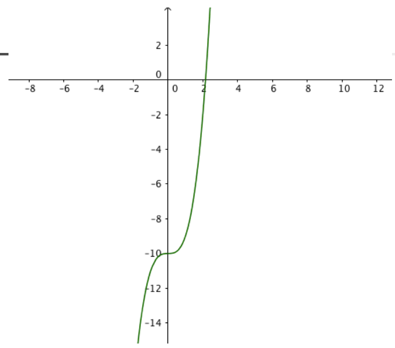
k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	2,00000	3,00000	-0,39794	0,43136	2,50000	-0,00510
1	2,50000	3,00000	-0,00515	0,43136	2,75000	0,20820
2	2,50000	2,75000	-0,00515	0,20816	2,62500	0,10021
3	2,50000	2,62500	-0,00515	0,10021	2,56250	0,04720
4	2,50000	2,56250	-0,00515	0,04720	2,53125	0,02090
5	2,50000	2,53125	-0,00515	0,02094	2,51563	0,00790
6	2,50000	2,51563	-0,00515	0,00787	*2,50781*	*0,00140*

$\varepsilon = 0{,}002$

18

Ex: Achar a raiz da equação $f(x) = x^3 - 10$ no intervalo [2,3] com o erro absoluto $\delta < 0{,}1$

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$	Erro = $x_{k+1} - a_k$
0	2	3	-2	17	2,5	5,625	0,5
1	2	2,5	-2	5,625	2,25	1,390625	0,25
2	2	2,25	-2	1,390625	2,125	-0,404296875	0,125
3	2,125	2,25	-0,404296875	1,390625	2,1875	0,467529297	0,0625
4	2,125	2,1875	-0,404296875	0,467529297	2,15625	0,025299072	0,03125
5	2,15625	2,1875	0,025299072	0,467529297	2,171875	0,244823456	0,015625
6	2,171875	2,1875	0,244823456	0,467529297	2,1796875	0,355777264	0,0078125



Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 02: Seja $f(x) = x^3 - x - 1$

Intervalo inicial atribuído: [1, 2]

Considerando-se ε = 0,002

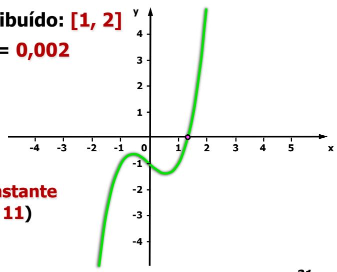
$f(a_0) = -1$

$f(b_0) = 5$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$f(a_0) * f(b_0) = -5 < 0$

Sinal da derivada constante ($f'(a_0) = 2$ e $f'(b_0) = 11$)



Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 02: $f(x) = x^3 - x - 1$

- **Cálculo da 1ª aproximação**
  - **$x_1 = (a_0+b_0)/2 = (1{,}000000+2{,}000000)/2 =$ $x_1 = 1{,}500000$**
  - **$f(x_1) = 1{,}5^3 - 1{,}5 - 1 = 0{,}875000$**
  - **Teste de Parada**
    - **$|f(x_1)| = |0{,}875| = 0{,}875000 > 0{,}002$**
  - **Escolha do Novo Intervalo**
    - **$f(a_0).f(x_1) = (-1).0{,}875 = -0{,}875$**

      logo: $a_1=a_0=1{,}000000$ e $b_1=x_1= 1{,}50000$

⋮

Cálculo Numérico – **Bissecção**

Exemplo 02: $f(x) = x^3 - x - 1$

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_{k+1}	$f(x_{k+1})$
0	1,0000000	2,0000000	-1,000000	5,000000	1,50000000	0,875000
1	1,0000000	1,5000000	-1,000000	0,875000	1,25000000	-0,296875
2	1,2500000	1,5000000	-0,296875	0,875000	1,37500000	0,224609
3	1,2500000	1,3750000	-0,296875	0,224609	1,31250000	-0,051514
4	1,3125000	1,3750000	-0,051514	0,224609	1,34375000	0,082611
5	1,3125000	1,3437500	-0,051514	0,082611	1,32812500	0,014576
6	1,3125000	1,3281250	-0,051514	0,014576	1,32031250	-0,018711
7	1,3203125	1,3281250	-0,018700	0,014576	*1,32421875*	*-0,002128*

ε = 0,002

Exercícios

- $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$

  $\varepsilon = 0{,}001$

- $f(x) = e^x - 5x$
- Intervalo [2,4; 2,6] $\varepsilon = 0{,}0001$

- $f(x) = 3x^3 - 4$
- Intervalo [0; 2] $\varepsilon = 0{,}0001$

3.4.4. Exercícios de Fixação

Calcular pelo menos uma raiz real das equações abaixo, com $\epsilon \leqslant 10^{-2}$, usando o método da bisseção.

3.4.4.1 $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$

3.4.4.2 $f(x) = x + \log x = 0$

3.4.4.3 $f(x) = 3x - \cos x = 0$

3.4.4.4 $f(x) = x + 2\cos x = 0$

25

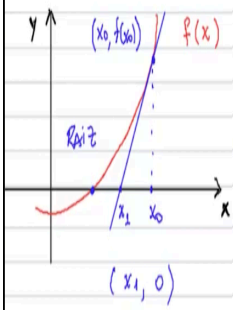
Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Método de *Newton-Raphson***

Dada uma função f(x) contínua no intervalo [a,b] onde existe uma raiz única, é possível determinar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da tangente à curva em um ponto x_0 com o eixo das abscissas.

x_0 - atribuído em função da geometria do método e do comportamento da curva da equação nas proximidades da raiz.

26



$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)\,(x_1 - x_0)$$

$$\frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 - x_0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

CASO GERAL

27

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Considerações Iniciais**
  - **Deste modo, escolhido x_0, a seqüência $\{x_k\}$ será determinada por**

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

onde $k = 0, 1, 2, \ldots$

28

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Motivação Geométrica**
  - **Dado o ponto (x_k, $f(x_k)$)**
    - **Traça-se a reta $L_k(x)$ tangente à curva neste ponto:**

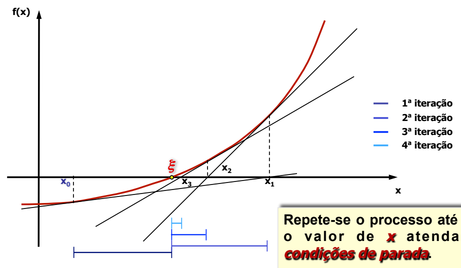
      $L_k(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x-x_k)$
    - **Determina-se o zero de $L_k(x)$, um modelo linear que aproxima $f(x)$ em uma vizinhança x_k**

      $L_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$
    - **Faz-se $x_{k+1} = x$**

29

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Análise Gráfica**



Repete-se o processo até que o valor de *x* atenda às *condições de parada*.

30

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Estudo da Convergência**

TEOREMA 3:

Sendo $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas em um intervalo I que contém uma raiz $x = \xi$ de $f(x) = 0$ e supondo $f'(\xi) \neq 0$, existirá um intervalo $\bar{I} \subseteq I$ contendo a raiz ξ, tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a seqüência $\{x_k\}$ gerada pela fórmula recursiva

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

convergirá para a raiz.

31

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

- **Testes de Parada**

  - **A cada iteração, testa-se se a aproximação encontrada poderá ser considerada como a solução do problema.**
    - $|f(x_k)| \leq$ *tolerância*
    - $|((x_{k+1} - x_k)/x_{k+1})| \leq$ *tolerância*

32

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Algoritmo

```
k := 0; x0 := x;
while critério de interrupção não satisfeito and k ≤ L
    k := k +1;
    xk+1 := xk – f(xk)/f'(xk)
endwhile
```

33

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 17: No Exemplo 13, no qual $x^2 + x - 6 = 0$:

- **Seja $x_0 = 1,5$**
- **Assim:**
  - $g(x) = x - f(x)/f'(x) = x - (x^2 + x - 6)/(2x + 1)$
  - $x_1 = g(x_0) = 1,5 - (1,5^2 + 1,5 - 6)/(2.1,5 + 1)$
    $x_1 = 2,062500000$
  - $x_2 = g(x_1) = 2,000762195$
  - $x_3 = g(x_2) = 2,000000116$

⋮

34

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

x	Xk	F(x)
1,5	2,0625	0,31640625
2,0625	2,000762195	0,003811557
2,000762195	2,000000116	5,80764E-07
2,000000116	2	1,33227E-14
2	2	0

35

Cálculo Numérico – **Newton-Raphson**

Exemplo 18: Considere-se a função $f(x) = x^3 - x - 1$, e $tol = 0,001$ cujos zeros encontram-se nos intervalos:

$$\xi_1 \in I_1 = (-1, 0), \quad \xi_2 \in I_2 = (1, 2)$$

- **Seja $x_0 = 1$**
- $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$
- **e** $g(x) = x - (x^3 - x - 1)/(3x^2 - 1)$

36

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Exemplo 18:

- **Cálculo da 1ª aproximação**

  $$g(x_0) = 1 - \frac{[\,(1)^3 - 1 - 1\,]}{[\,3*(1)^2 - 1\,]} = 1{,}5$$

  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_0)| = |\,0{,}875\,| = 0{,}875 > \varepsilon$

37

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Exemplo 18:

- **Cálculo da 2ª aproximação**

  $$g(x_1) = 1.5 - \frac{[\,(1.5)^3 - 1.5 - 1\,]}{[\,3*(1.5)^2 - 1\,]} = 1{,}3478261$$

  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_1)| = |\,0{,}100682\,| = 0{,}100682 > \varepsilon$

38

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Exemplo 18:

- **Cálculo da 3ª aproximação**

  $$g(x_2) = 1{,}3478261 - \frac{[\,(1{,}3478261)^3 - 1{,}3478261 - 1\,]}{[\,3*(1{,}3478261)^2 - 1\,]}$$

  $g(x_2) = 1{,}3252004$

  - **Teste de Parada**
    - $|f(x_2)| = |\,0{,}0020584\,| = 0{,}0020584 > \varepsilon$

39

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Exemplo 18:

A seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo método de Newton será:

Iteração	x	F(x)
1	1,5	0,875
2	1,3478261	0,1006822
3	1,3252004	0,0020584
4	1,3247182	$9{,}24378.10^{-7}$
5	1,3247178	$1{,}86517.10^{-13}$

40

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Vantagens:

- **Rapidez processo de convergência;**
- **Desempenho elevado.**

41

Cálculo Numérico – Newton-Raphson

Desvantagens:

- **Necessidade da obtenção de $f'(x)$, *o que pode ser impossível em determinados casos;***
- **O cálculo do valor numérico de $f'(x)$ a cada iteração;**
- **Difícil implementação.**

42