MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES

FUNÇÕES CRESCENTES E DECRESCENTE

USO DA DERIVADA PARA INSPECIONAR CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO DE UMA FUNÇÃO

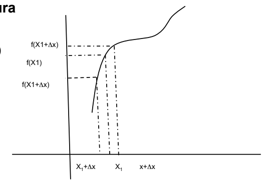
Teorema 1. Se a função f(x), derivável no intervalo [a,b], é crescente neste intervalo, então sua derivada não será negativa neste intervalo; i. e. f´(x)>0.

2. Se a função f(x) é contínua no intervalo [a,b], derivável em (a,b) e se, além disso, f´(x)>0 para a<x<b, então f(x) é uma função crescente em [a,b],

Demonstração

Se f(x) é crescente, considerando um ponto $x=x_1$, teremos, para $x_1+\Delta x$, que, conforme pode ser visto na figura

$$f(x_1+\Delta x) > f(x_1) \quad para \quad \Delta x > 0$$
$$f(x_1+\Delta x) < f(x_1) \quad para \ \Delta x < 0$$
$$ou$$
$$\Delta f > 0 \quad para \quad \Delta x > 0$$
$$\Delta f < 0 \quad para \ \Delta x < 0$$



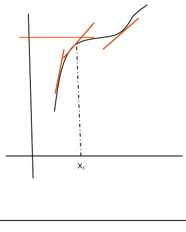
Entretanto, a relação

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0 \qquad \text{tanto para} \quad \Delta x > 0, \text{como } para\ \Delta x < 0$$

Por conseqüência,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_1) \geq 0$$

Isto quer dizer então, que as tangentes à curva f(x) formam ângulos maiores ou iguais azero



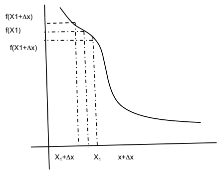
Teorema 2. Se a função f(x), derivável no intervalo [a,b], é decrescente neste intervalo, então sua derivada não será positiva neste intervalo; i. e. f´(x)<0.

2. Se a função f(x) é contínua no intervalo [a,b], derivável em (a,b) e se, além disso, f´(x)<0 para a<x<b, então f(x) é uma função decrescente em [a,b],

Demonstração

Se f(x) é decrescente, considerando um ponto x=x_1, teremos, para $x_1+\Delta x$, que, conforme pode ser visto na figura

$$
\begin{aligned}
&f(x_1+\Delta x) < f(x_1) \qquad para \quad \Delta x > 0\\
&f(x_1+\Delta x) > f(x_1) \qquad para\ \Delta x < 0\\
&ou\\
&\Delta f < 0 \qquad para \quad \Delta x > 0\\
&\Delta f > 0 \qquad para\ \Delta x < 0
\end{aligned}
$$



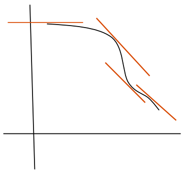
Entretanto, a relação

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0 \qquad \text{tanto para} \quad \Delta x > 0, \text{como } para\ \Delta x < 0$$

Por conseqüência,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_1) \leq 0$$

Isto quer dizer então, que as tangentes à curva f(x) formam ângulos maiores ou iguais azero



EXTREMOS DE UMA FUNÇÃO: MÁXIMOS E MINIMOS

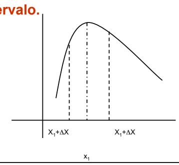
Definição 1 (Máximo). Diz-se que a função f(x) admite um máximo em um ponto x=x_1, se o valor da função em x_1, f(x_1), é maior que aqueles valores da função em todos pontos de uma vizinhança de x_1.

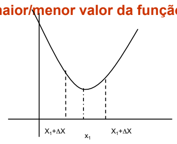
Então, pela definição f(x_1+Δx)< f(x_1), seja, Δx positivo ou negativo. Em outras palavras, Δf<0, sempre.

Definição 2 (Mínimo). Diz-se que a função f(x) admite um mínimo em um ponto x=x_1, se o valor da função em x_1, f(x_1), é menor que aqueles valores da função em todos pontos de uma vizinhança de x_1.

Então, pela definição f(x_1+Δx)< f(x_1), seja, Δx positivo ou negativo. Em outras palavras, Δf>0, sempre.

Não confundir máximo/mínimo com o maior/menor valor da função num intervalo.



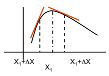


Os pontos onde uma função atinge seus extremos, máximos ou mínimos, são chamados **pontos críticos da função, assim como os pontos de descontinuidade.**

Teorema . Seja f(x) uma função contínua em um intervalo contendo um ponto crítico x_1 e derivável em todos os pontos desse intervalo, salvo excepcionalmente no ponto crítico. Se a derivada de f(x) muda de sinal + para -, quando se passa pelo ponto crítico x_1, da esquerda para a direita, então a função admite um máximo em x_1. Se, por outro lado, a derivada muda de sinal de – para +, quando se passa pelo ponto crítico x_1, da esquerda para a direita, então a função tem um mínimo em x_1.

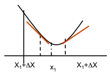
Analiticamente, esses teoremas expressam que existe um máximo em x_1 se

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < x_1$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x > x_1$$



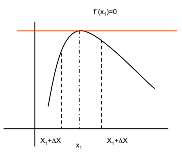
E existe um mínimo em x_1, se

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x < x_1$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > x_1$$

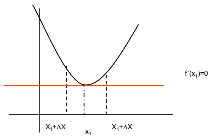


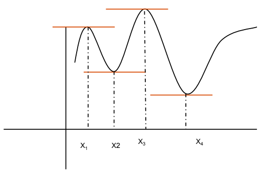
A demonstração deste teorema é feita com a aplicação do Teorema de Lagrange num intervalo compreendido entre um ponto x e o ponto x_1.

MÁXIMO

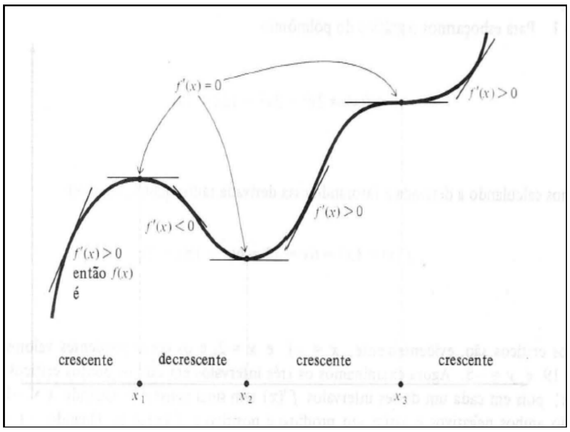


MÍNIMO





MÁXIMOS E MÍNIMOS

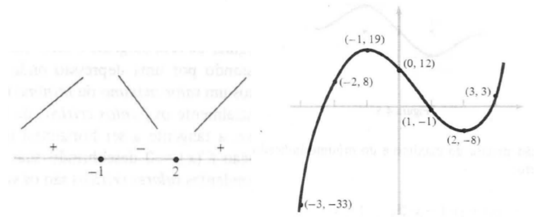


Exemplo 1 Para esboçarmos o gráfico do polinômio

$$y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12,$$

começamos calculando a derivada e fatorando essa derivada tanto quanto possível:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2).$$

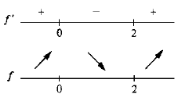


EXEMPLO 1. Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

a) Estude f com relação a máximos e mínimos.
b) Determine os valores máximo e mínimo de f em $[-2, 3]$. Em que pontos estes valores são atingidos?

Solução

a) $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 6x}$

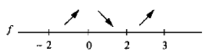


ponto de máximo local: 0
ponto de mínimo local: 2

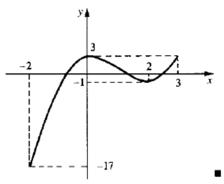
Como $\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 3) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 3) = -\infty$, segue que f não assume nem valor máximo global, nem valor mínimo global.

b)

x	$f(x)$
-2	-17
0	3
2	-1
3	3



$f(-2) = -17$ é o valor mínimo de f em $[-2, 3]$.
$f(0) = f(3) = 3$ é o valor máximo de f em $[-2, 3]$.

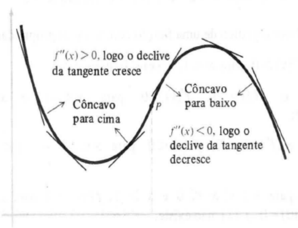


■

1. $y = x^2 - 2x.$
2. $y = 2 + x - x^2.$
3. $y = x^2 - 6x + 9$
4. $y = x^2 - 4x + 5.$
5. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$
6. $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$
7. $y = x^3 - x.$
8. $y = x^4 - 2x^2 + 1.$
9. $y = 3x^4 + 4x^3.$
10. $y = 3x^5 - 20x^3.$

CONCAVIDADE E PONTO DE INFLEXÃO

Uma segunda derivada positiva, $f''(x) > 0$, indica que o coeficiente angular $f'(x)$ é uma função crescente de x. Isto significa que a tangente à curva gira no sentido anti-horário quando nos movemos ao longo da curva, da esquerda para a direita, como é mostrado no lado esquerdo da Fig. 4.8.



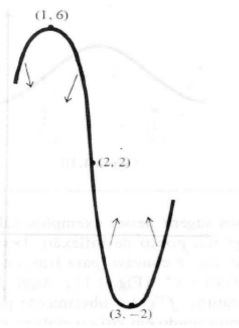
Exemplo 1 Investigue a função

$$y = f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2$$

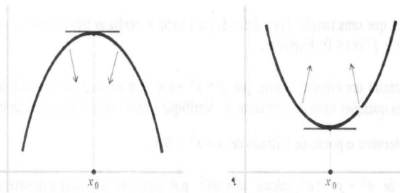
quanto à concavidade e pontos de inflexão. Calculamos

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x-1)(x-3)$$

$$f''(x) = 12x - 24 = 12(x-2).$$



Observação No chamado *teste da segunda derivada* – que formulamos informalmente com o auxílio da Fig. 4.13 – o sinal da segunda derivada é usado para decidir se um ponto crítico é ponto de máximo ou de mínimo. Esse teste, às vezes é útil, mas sua importância é, com freqüência, exagerada. Veremos nas próximas duas seções que, na maioria dos problemas aplicados, é fácil a partir do contexto decidir se estamos em presença de um ponto de máximo ou de mínimo sem nenhum teste.



Um máximo, se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$

Um mínimo, se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$

Exemplo 1 Achar dois números positivos cuja soma é 16 e cujo produto é o máximo possível.

Solução Sejam x e y dois números positivos variáveis cuja soma é 16:

$$x + y = 16. \tag{1}$$

Procuramos valores particulares de x e y que maximizem o produto

$$P = xy. \tag{2}$$

A dificuldade inicial é que P depende de duas variáveis, e o nosso cálculo de derivadas trabalha somente com funções de uma única variável independente.
A equação (1) permite-nos superar essa dificuldade. Permite também expressar y em termos de x, $y = 16 - x$ e, com isso, expressar P como uma função apenas de x,

$$P = x(16 - x) = 16x - x^2. \tag{3}$$

$$\frac{dP}{dx} = 16 - 2x,$$

e igualamos essa derivada a zero,

$$16 - 2x = 0.$$

Temos que $x = 8$ é a solução dessa equação. Este é o valor de x que maximiza P. Por (1), o valor correspondente de y é também 8. É bastante claro (Fig. 4.14) que $x = 8$ realmente maximiza P,

Exemplo 2 Um jardim retangular de $50\,\text{m}^2$ de área deve ser protegido contra animais. Se um lado do jardim já está protegido por uma parede de celeiro, quais as dimensões da cerca de menor comprimento?

Solução Começamos desenhando um esboço e introduzindo uma notação conveniente para tratarmos com a área do jardim e o comprimento total da cerca. (Fig. 4.15).

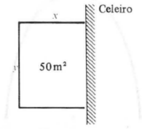


Figura 4.15

Denotamos por L o comprimento da cerca. Queremos minimizar

$$L = 2x + y \tag{4}$$

sujeito à restrição

$$xy = 50. \tag{5}$$

Utilizando (5), podemos escrever L como uma função apenas de x,

$$L = 2x + \frac{50}{x}. \tag{6}$$

Um rápido esboço (Fig. 4.16) ajuda-nos a visualizar essa função e a sentirmo-nos à vontade para lidar com suas propriedades, especialmente com o fato de que ela tem um mínimo e não máximo (estamos interessados apenas em valores positivos de x).

Os passos seguintes são: calcular a derivada de (6),

$$\frac{dL}{dx} = 2 - \frac{50}{x^2},$$

igualar essa derivada a zero e resolver a seguinte equação:

$$2 - \frac{50}{x^2} = 0, \qquad x^2 = 25, \qquad x = 5.$$

(Ignoramos a raiz $x = -5$ pela razão exposta.) Por (5), o valor correspondente de y é $y = 10$; logo o jardim com a menor cerca tem 5 metros de largura e 10 metros de comprimento.

Exemplo 5 Ao preço de Cz$ 1,50 um vendedor ambulante pode vender 500 unidades de uma certa mercadoria que custa 70 centavos cada. Para cada centavo que o vendedor abaixa no preço, a quantidade vendida pode aumentar de 25. Que preço de venda maximizará o lucro?

Solução Façamos x denotar o número de unidades monetárias que o vendedor abaixa no preço; o lucro na venda de cada mercadoria será $80 - x$ centavos, e a quantidade vendida será $500 + 25x$. O lucro total é, portanto (em cruzados),

$$P = (80 - x)(500 + 25x) = 40.000 + 1500x - 25x^2.$$

Maximizamos essa função igualando sua derivada a zero e resolvendo a equação resultante

$$\frac{dP}{dx} = 1500 - 50x, \qquad 1500 - 50x = 0, \qquad 50x = 1500, \qquad x = 30.$$

O preço de venda mais vantajoso é, portanto, Cz$ 120,00.