GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

LISTA DE EXERCÍCIOS
Cálculo I -A-
Humberto José Bortolossi
http://www.professores.uff.br/hjbortol/

11

A regra da cadeia

[01] Derive cada uma das funções dadas abaixo.

(a) $F(x) = (x^3 + 4\,x)^7$,
(b) $F(x) = (x^2 - x + 1)^3$,
(c) $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2\,x + x^3}$,
(d) $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$,
(e) $g(t) = 1/(t^4 + 1)^3$,
(f) $f(t) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg}(t)}$,
(g) $y = \cos(a^3 + x^3)$,
(h) $y = a^3 + \cos^3(x)$,
(i) $y = e^{-mx}$,
(j) $y = 4\sec(5\,x)$,
(k) $g(x) = (1 + 4\,x)^5(3 + x - x^2)^8$,
(l) $h(t) = (t^4 - 1)^3(t^3 + 1)^4$,
(m) $y = (2\,x - 5)^4(8\,x^2 - 5)^{-3}$,
(n) $y = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^{1/3}$,
(o) $y = x\,e^{(-x^2)}$,
(p) $y = e^{-5\,x}\cos(3\,x)$,
(q) $y = e^{x\cos(x)}$,
(r) $y = 10^{1-x^2}$.
(s) $y = \operatorname{tg}(\cos(x))$,
(t) $y = \operatorname{sen}^2(x)/\cos(x)$,
(u) $y = 2^{\operatorname{sen}(\pi x)}$,
(v) $y = \operatorname{tg}^2(3\,\theta)$,
(w) $y = x^x$,
(x) $y = x^{\operatorname{sen}(x)}$,
(y) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)))$,
(z) $y = \operatorname{sen}(\operatorname{tg}(\sqrt{\operatorname{sen}(x)}))$.

[02] Derive cada uma das funções dadas abaixo.

(a) $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$,
(b) $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2\,y)^5}$,
(c) $F(z) = \sqrt{\dfrac{z - 1}{z + 1}}$,
(d) $y = \dfrac{e^{2\,u}}{e^u + e^{-u}}$,
(e) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$,
(f) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

[03] Encontre todos os pontos sobre o gráfico da função $f(x) = 2\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}^2(x)$ nos quais a reta tangente é horizontal

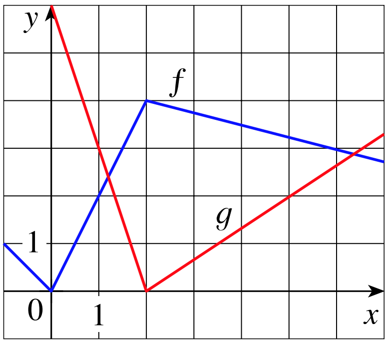
[04] A tabela abaixo apresenta valores para f, g, f' e g'.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

Se $h(x) = f(g(x))$, $H(x) = g(f(x))$, $F(x) = f(f(x))$ e $G(x) = g(g(x))$, calcule $h'(1)$, $H'(1)$, $F'(2)$ e $G'(3)$.

[05] Sejam f e g duas funções diferenciáveis. Se $F(x) = f(g(x))$, $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$ e $f'(6) = 7$, calcule $F'(3)$.

[06] A figura abaixo exige o gráfico de duas funções $y = f(x)$ e $y = g(x)$.



Se $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$ e $w(x) = g(g(x))$, calcule (caso existam) as derivadas $u'(1)$, $v'(1)$ e $w'(1)$.

[07] Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $F(x) = f(e^x)$ e $G(x) = e^{f(x)}$, calcule $F'(x)$ e $G'(x)$.

[08] Use a regra da cadeia para mostrar que (a) a derivada de uma função diferenciável par é uma função ímpar e (b) a derivada de uma função diferenciável ímpar é uma função par.

Respostas dos Exercícios

[01] (a) $F'(x) = 7\,(x^3+4\,x)^6(3\,x^2+4)$,

(b) $F'(x) = 3\,(x^2-x+1)^2(2\,x-1)$,

(c) $F'(x) = (2+3\,x^2)/(4\,\sqrt[4]{(1+2\,x+x^3)^3})$,

(d) $f'(x) = 8\,x^3/(3\,\sqrt[3]{1+x^4})$,

(e) $g'(t) = -12\,t^3/(t^4+1)^4$,

(f) $f'(t) = \sec^2(t)/(3\,\sqrt[3]{(1+\operatorname{tg}(t))^2})$,

(g) $y' = -3\,x^2\operatorname{sen}(a^3+x^3)$,

(h) $y' = -3\,\operatorname{sen}(x)\cos^2(x)$,

(i) $y' = -me^{-mx}$,

(j) $y' = 20\,\sec(5\,x)\operatorname{tg}(5\,x)$,

(k) $g'(x) = 4\,(1+4\,x)^4(3+x-x^2)^7(17+9\,x-21\,x^2)$,

(l) $h'(t) = 12\,t^2(t^4-1)^2(t^3+1)^3(2\,t^4+t-1)$,

(m) $y' = 8\,(2\,x-5)^3(8\,x^2-5)^{-3} - 48\,x(2\,x-5)^4(8\,x^2-5)^{-4}$,

(n) $y' = 2\,x(x^2+2)^{1/3}[1+(x^2+1)/(3\,(x^2+2))]$,

(o) $y' = e^{(-x^2)}(1-2\,x^2)$,

(p) $y' = -e^{-5\,x}(3\,\operatorname{sen}(3\,x)+5\,\cos(3\,x)$,

(q) $y' = e^{x\cos(x)}(\cos(x)-x\operatorname{sen}(x))$,

(r) $y' = -2\,x\ln(10)10^{1-x^2}$ (dica: use que $10^u = e^{\ln(10^u)} = e^{u\ln(10)}$),

(s) $y' = -\operatorname{sen}(x)\,\sec^2(\cos(x))$,

(t) $y' = \operatorname{sen}(x)(1+\sec^2(x))$,

(u) $y' = \pi\,\ln(2)\,2^{\operatorname{sen}(\pi x)}\cos(\pi x)$ (dica: use que $2^u = e^{\ln(2^u)} = e^{u\ln(2)}$)),

(v) $y' = 6\,\operatorname{tg}(3\,\theta)\sec^2(3\,\theta)$,

(w) $y' = x^x(\ln(x)+1)$ (dica: use que $u^u = e^{\ln(u^u)} = e^{u\ln(u)}$)),

(x) $y' = x^{\operatorname{sen}(x)}(\cos(x)\ln(x)+\operatorname{sen}(x)/x)$ (dica: use que $u^u = e^{\ln(u^u)} = e^{u\ln(u)}$)),

(y) $y' = \cos(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)))\cos(\operatorname{sen}(x))\cos(x)$,

(z) $y' = \cos(\operatorname{tg}(\sqrt{\operatorname{sen}(x)}))\sec^2(\sqrt{\operatorname{sen}(x)})\cos(x)/(2\sqrt{\operatorname{sen}(x)})$.

[02] (a) $y' = \dfrac{1}{(r^2+1)^{3/2}}$, (b) $G'(y) = \dfrac{2\,(y-1)^3(-3\,y^2+4\,y+5)}{(y^2+2\,y)^6}$,

(c) $F'(z) = \dfrac{1}{(z-1)^{1/2}(z+1)^{3/2}}$, (d) $y' = \dfrac{e^{2\,u}(e^u+3\,e^{-u})}{(e^u+e^{-u})^2}$,

(e) $y' = \dfrac{1}{2\,\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\dfrac{1}{2\,\sqrt{x}}\right)$,

(f) $y' = \dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)^{-1/2}\left[1+\dfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x}\right)^{1/2}\left(1+\dfrac{1}{2}x^{-1/2}\right)\right]$.

[03] Os pontos são da forma $(\pi/2+2\,k\pi, 3)$ e $(3\,\pi/2+2\,k\pi, -1)$, com $k\in\mathbb{Z}$.

[04] $h'(1) = 30$, $H'(1) = 36$, $F'(2) = 20$ e $G'(3) = 63$.

[05] $F'(3) = 28$.

[06] $u'(1) = 3/4$, $v'(1)$ não existe (pois $v'_+(1) = 4/3 \neq -6 = v'_-(1)$), $w'(1) = -2$.

[07] $F'(x) = e^x f'(e^x)$ e $G'(x) = f'(x)e^{f(x)}$.

[08] (a) Se f é uma função par, então $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Derivando os dois lados desta equação (o que é possível, pois f é diferenciável), obtemos que $f'(-x)(-1) = f'(x)$, isto é, $f'(-x) = -f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto mostra que f' é uma função ímpar. (b) Se f é uma função ímpar, então $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Derivando os dois lados desta equação (o que é possível, pois f é diferenciável), obtemos que $f'(-x)(-1) = -f'(x)$, isto é, $f'(-x) = f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto mostra que f' é uma função par.

Texto composto em LaTeX2e, HJB, 22/04/2014.