

Distribuição Normal

1

Distribuição Uniforme de Probabilidade

Situação: O departamento de vendas de uma empresa está aberto ao público durante 4 horas por dia. As vendas são feitas ao longo deste período sem que haja momentos de maior ou menor volume de vendas. Sabe-se que ocorre pelo menos uma venda por dia. Qual é a probabilidade de venda:

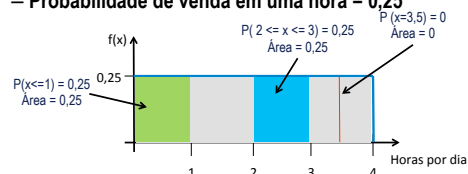
- Ao longo da primeira hora de trabalho no dia;
 - Entre a segunda e a terceira hora de atendimento;
 - Exatamente 3,5 horas após a abertura.
- tempo de atendimento: variável aleatória contínua.*

2

Distribuição Uniforme de Probabilidade

- Sabendo que a probabilidade de venda é igual para qualquer hora do dia, qual é a probabilidade de venda em cada hora?

– Probabilidade de venda em uma hora = 0,25



3

Distribuição Uniforme de Probabilidade

- A área do gráfico indica a probabilidade de ocorrência!
- A função que descreve o gráfico sob o qual queremos calcular a área se chama: **função densidade de probabilidade (f.d.p)**
- Ao tratar as variáveis aleatórias contínuas, é importante lembrar que:
 1. A probabilidade não se refere a um valor em particular, mas sim de um intervalo.
 2. A probabilidade de uma variável aleatória contínua assumir um valor de determinado intervalo é definida pela área do gráfico da função densidade de probabilidade. Uma vez que um ponto simples é um intervalo que tem largura igual a zero, isso implica que a probabilidade de uma variável aleatória contínua assumir um valor em particular é igual a zero.

4

Distribuição de Probabilidade

- A **distribuição de probabilidade** de uma variável aleatória descreve como as probabilidades estão distribuídas sobre os valores de uma variável aleatória
- Vantagem de definir a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória é que, uma vez conhecida a distribuição, torna-se fácil determinar a probabilidade de ocorrência de uma série de eventos

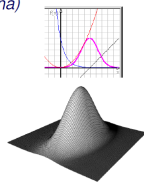
5

Distribuição Normal de Probabilidade

- Distribuições contínuas de probabilidade
 - A mais importante distribuição de probabilidade para descrever uma variável aleatória contínua é a **distribuição normal de probabilidade**

(Gaussiana)

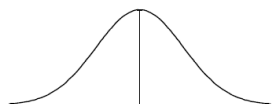
Johan Carl
Friedrich Gauss
(1777-1855)



6

Distribuição Normal de Probabilidade

- A **distribuição normal de probabilidade** tem formato de sino



- A f.d.p é $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty \leq x \leq +\infty$
 $e = 2,71828$

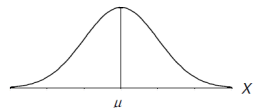
7

Distribuição Normal de Probabilidade

- Distribuição normal

– Curva normal

- Simétrica em relação à média μ e curva na forma de sino.



- $-\infty \leq x \leq \infty$
- Notação: $N(\mu; \sigma^2)$

8

Distribuição Normal de Probabilidade

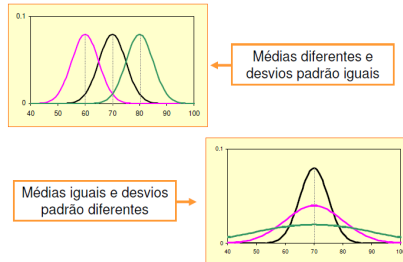
- Características da Distribuição Normal

- A família inteira das distribuições de probabilidade é diferenciada por dois parâmetros, a média e o desvio padrão
- O ponto máximo da curva normal encontra-se na média, que é também a mediana e a moda da distribuição
- A média da distribuição pode ser qualquer valor numérico: negativo, zero ou positivo.
- A distribuição Normal é simétrica, sendo a forma da curva à esquerda da média uma imagem espelhada da forma da curva a direita da média
- O desvio padrão determina o quanto a curva é achatada ou larga

9

Distribuição Normal de Probabilidade

• Características da Distribuição Normal

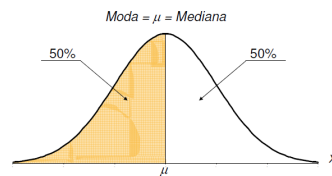


10

Distribuição Normal de Probabilidade

• Características da Distribuição Normal

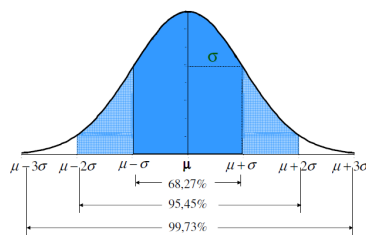
- As probabilidades da variável aleatória normal são dadas por áreas sob a curva. A área total sob a curva é 1. Já que a distribuição é simétrica, a área sob a curva, à direita da média é 0,5 e à esquerda também



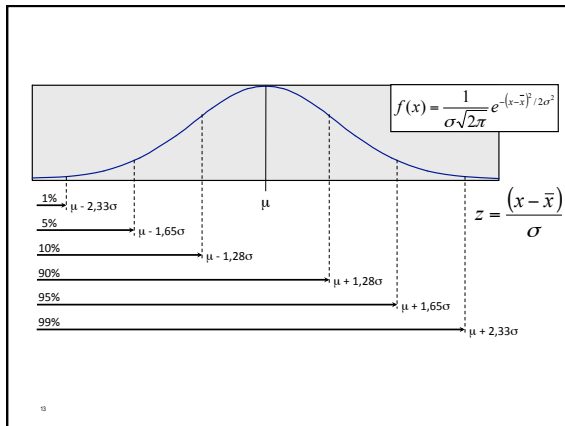
11

Distribuição Normal de Probabilidade

- Características da Distribuição Normal
- As percentagens dos valores de alguns

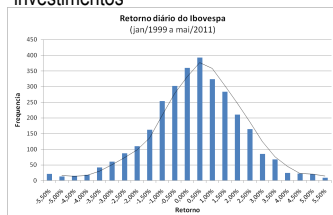


12



Distribuição Normal de Probabilidade

- Importância da distribuição Normal
 - Assume grande importância na avaliação de investimentos



Distribuição Normal de Probabilidade

- **Situação:** Sabendo eu uma série de retornos de um ativo possui distribuição normal (com média e desvio padrão conhecidos), podemos calcular a probabilidade do retorno deste estar dentro de um intervalo de interesse.

Como calcular a área da distribuição normal?

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

Usar a tabela estatística!
Determinar a variável padrão!
(distribuição normal padrão)

Distribuição Normal de Probabilidade

- Para encontrar a probabilidade de uma variável aleatória estar dentro de um intervalo específico, devemos calcular a área sob a curva normal ao longo desse intervalo.
- Para a distribuição normal padrão, as áreas sob a curva normal foram calculadas e estão disponíveis em tabelas que podem ser usadas no cálculo das probabilidades.
- Dizemos que a variável aleatória que tem uma distribuição Normal cuja a média é zero e desvio padrão 1 tem uma distribuição normal padrão de probabilidade
- Usaremos a letra z representar uma variável aleatória com distribuição normal
- A tabela apresenta a probabilidade acumulada entre 0 e z1, para uma distribuição normal padronizada (média 0 e desvio padrão 1)

16

Tabela III — Distribuição Normal Padrão
Corpo da tabela dá a probabilidade p , tal que $p = P(0 < z < z)$

parte inteira e primeira decimal de z		segunda decimal de z										parte inteira e primeira decimal de z
$p = 0$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0.0	0.0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586	0.0	
0.1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535	0.1	
0.2	07928	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409	0.2	
0.3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173	0.3	
0.4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18795	0.4	
0.5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240	0.5	
0.6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490	0.6	
0.7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524	0.7	
0.8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30786	31057	31327	0.8	
0.9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891	0.9	
1.0	34134	34375	34614	34850	35083	35313	35541	35766	35989	36210	1.0	
1.1	36433	36643	36849	37053	37255	37455	37652	37846	38038	38228	1.1	
1.2	38419	38608	38795	38979	39161	39341	39518	39693	39866	40037	1.2	
1.3	40206	40373	40538	40701	40862	41021	41178	41332	41484	41634	1.3	
1.4	41782	41928	42072	42214	42354	42492	42628	42762	42894	43025	1.4	
1.5	43154	43281	43406	43529	43650	43769	43886	43999	44115	44229	1.5	
1.6	44340	44457	44571	44683	44793	44900	45006	45110	45212	45313	1.6	
1.7	45412	45510	45607	45703	45798	45891	45982	46072	46160	46246	1.7	
1.8	46340	46427	46512	46596	46679	46760	46840	46918	47000	47079	1.8	
1.9	47156	47240	47322	47403	47482	47560	47637	47712	47787	47860	1.9	
2.0	47932	48006	48078	48149	48218	48286	48352	48417	48480	48541	2.0	
2.1	48601	48659	48716	48772	48827	48881	48934	48986	49037	49087	2.1	
2.2	49136	49184	49231	49277	49322	49366	49409	49451	49492	49532	2.2	
2.3	49571	49609	49646	49682	49717	49751	49784	49816	49847	49877	2.3	
2.4	49906	49934	49961	49987	50012	50036	50059	50081	50102	50123	2.4	
2.5	50143	50163	50182	50200	50218	50235	50251	50267	50282	50296	2.5	
2.6	50310	50324	50338	50351	50364	50376	50388	50399	50410	50421	2.6	
2.7	50432	50442	50452	50461	50470	50478	50486	50493	50500	50506	2.7	
2.8	50513	50519	50524	50529	50533	50537	50540	50543	50546	50548	2.8	
2.9	50550	50552	50554	50556	50557	50558	50559	50560	50561	50562	2.9	
3.0	50562	50563	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	3.0	
3.1	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	3.1	
3.2	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	3.2	
3.3	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	3.3	
3.4	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	3.4	
3.5	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	3.5	
3.6	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	3.6	
3.7	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	3.7	
3.8	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	3.8	
3.9	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	3.9	
4.0	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	4.0	
4.5	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	50564	4.5	

Distribuição Normal de Probabilidade

- Como usar a tabela estatística:
 - Passo 1: calcular o valor z

$$N(\mu; \sigma^2) \rightarrow N(0; 1)$$

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Distância de X da média

Métrica dessa distância

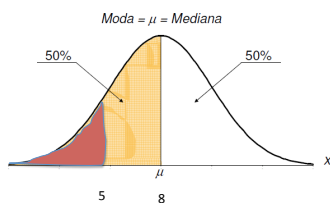
$z > 0 \rightarrow X$ maior que a média $\mu = 0$

$z < 0 \rightarrow X$ menor que a média $\sigma = 1$

18

- Suponha que o tempo necessário para atendimento de cliente na fila de um banco seja normalmente distribuído com média de 8 min, e o desvio padrão de 2 min. Qual a probabilidade de que o atendimento dure:

- A) Menos que 5 min



Calcular a área

Área vermelha = 50% - Área Amarela

$$Z = (5 - 8) / 2$$

$$Z = -1,50$$

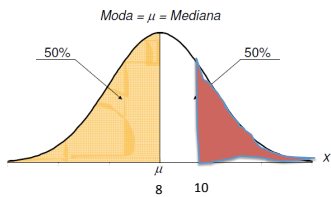
parte inteira e primeira decimal de Z_c	0	1	2
$p = 0$	00000	00399	00798
0,0	03983	04380	04776
0,1	07926	08317	08706
0,2	11791	12172	12552
0,3	15542	15910	16276
0,4	19146	19497	19847
0,5	22575	22907	23237
0,6	25804	26115	26424
0,7	28814	29103	29389
0,8	31594	31859	32121
0,9	34134	34375	34614
1,0	36433	36650	36864
1,1	38493	38686	38877
1,2	40320	40490	40658
1,3	42073	42220	42364
1,4	43319	43448	43574
1,5	44630	44738	44845
1,6	45543	45637	45728
1,7	46407	46485	46562
1,8			

Calculando a área

Área vermelha = 50% - 43,32%

Área Vermelha = 6,68%

- B) maior que 10 min



Calcular a área

Área vermelha = 50% - Área Branca

$$Z = (10 - 8) / 2$$

$$Z = 1,00$$

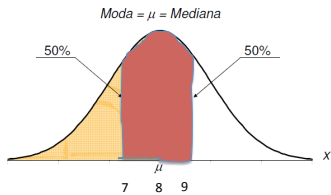
parte in- teira e primeira decimal de Z_c	0	1	2
	$p = 0$		
0,0	00000	00399	00798
0,1	03983	04380	04776
0,2	07926	08317	08706
0,3	11791	12172	12552
0,4	15542	15910	16276
0,5	19146	19497	19847
0,6	22575	22907	23237
0,7	25804	26115	26424
0,8	28814	29103	29389
0,9	31594	31859	32121
1,0	34134	34375	34614
1,1	36433	36650	36864
1,2	38493	38686	38877
1,3	40320	40490	40658
1,4	41924	42073	42220
1,5	43319	43448	43574
1,6	44520	44630	44738
1,7	45543	45637	45728
1,8	46407	46485	46562

Calculando a área

Área vermelha = 50% - 34,13%

Área Vermelha = 15,87%

• C) Entre 7 e 9 min



$$Z1 = (7 - 8) / 2$$

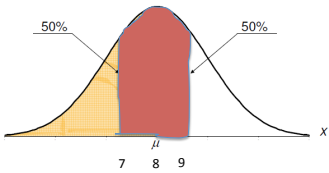
$$Z1 = -0,50$$

$$Z2 = (9 - 8) / 2$$

$$Z2 = 0,50$$

parte inteira e primeira decimal de Z_c	0	1	2
p = 0	00000	00399	00798
0,0	03983	04380	04776
0,1	07926	08317	08706
0,2	11791	12172	12552
0,3	15910	16276	16640
0,4	19146	19497	19847
0,5	22804	23237	23664
0,6	25804	26115	26424
0,7	28814	29103	29389
0,8	31594	31859	32121
0,9	34134	34375	34614
1,0	36433	36650	36864
1,1	38493	38686	38877
1,2	40320	40490	40658
1,3	41924	42073	42220
1,4	43319	43448	43574
1,5	44520	44630	44738
1,6	45543	45637	45728
1,7	46407	46485	46562
1,8			

Moda = μ = Mediana



50% 50%

μ

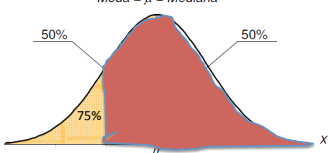
7 8 9

x

- Calculando a área
- $19,15 + 19,15 = 38,3$

- D) 75% dos atendimentos requerem no mínimo quanto tempo de atendimento?

Moda = μ = Mediana



50% 50%

75%

μ

x

$75\% = 50\% + 25\%$

$25\% = 0,2500$

decimal de Z_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	decimal de Z_i
	p=0										
0,0	00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586	0,0
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535	0,1
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409	0,2
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173	0,3
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793	0,4
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240	0,5
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490	0,6
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524	0,7

$$Z = 0,67$$

Como está no lado esquerdo

$$Z = -0,67$$

Colocando na fórmula

$$-0,67 = (x - 8)/2$$

$$-1,37 = x - 8$$

$$X = 8 - 1,37$$

$$X = 6,63$$
