# 3. DERIVADAS PARCIAIS[1]

## 3.1. ACRÉSCIMOS

### 3.1.1 Acréscimo total

Seja a função $z = f(x, y)$ definida na região $D \subset \Re^2$. Tomemos o ponto $(x, y) \in D$ e atribuamos a $x$ o acréscimo $\Delta x$ e a $y$ o acréscimo $\Delta y$, tais que o ponto $(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$.

O acréscimo da função quando passamos do ponto $(x, y)$ ao ponto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ é

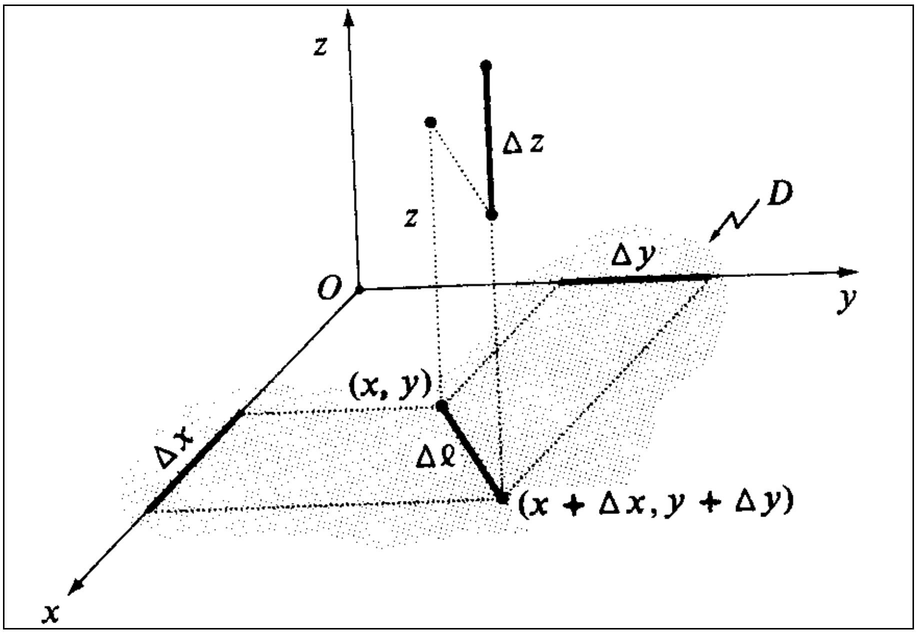
$$\boxed{\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}$$

e se chama **acréscimo total** da função.

A variação das variáveis independentes $x$ e $y$ pode ser avaliada através da distância $\Delta l$ entre os pontos $(x, y)$ e $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

A razão $\dfrac{\Delta z}{\Delta l} = \dfrac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta l}$ é uma razão incremental e seu limite, para $\Delta l \to 0$, definiria a derivada de $z = f(x, y)$, no ponto, caso o limite existisse.

Entretanto, este limite quase sempre não existe, pois o ponto, $(x, y)$ poderá aproximar-se do ponto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ de inúmeras maneiras e o limite vai depender da maneira de aproximação, isto é, da direção de aproximação. Estas considerações levar-nos-ão ao conceito de derivada direcional, que estudaremos mais adiante.




[1] O presente material faz parte da Apostila de Cálculo II, elaborada pelo prof. José Donizetti de Lima. Alguns tópicos da versão original foram suprimidos.

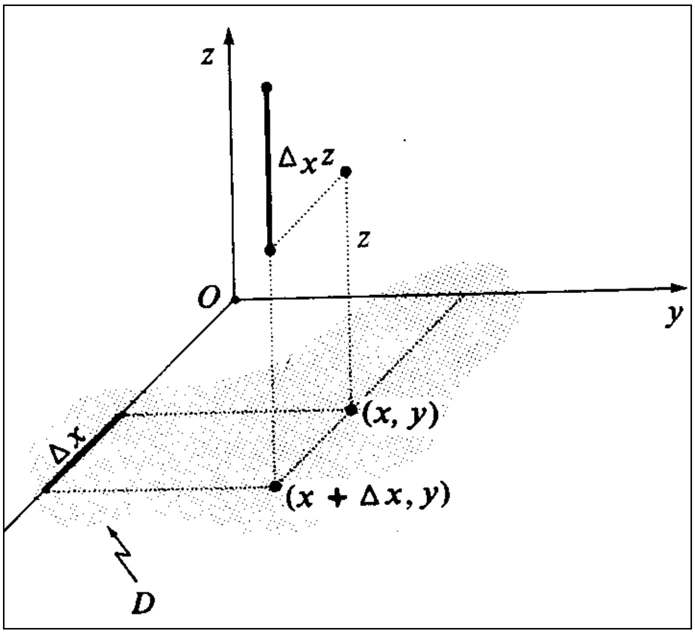
### 3.1.2. Acréscimos parciais

#### 3.1.2.1. Acréscimo parcial em x

Seja a função $z = f(x, y)$ e o ponto $(x, y) \in D$. Conservemos $y$ constante e atribuamos a $x$ o acréscimo $\Delta x$, tal que o ponto $(x + \Delta x, y) \in D$. O acréscimo da função quando passamos do ponto $(x, y)$ para o ponto $(x + \Delta x, y)$ é

$$\boxed{\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}$$

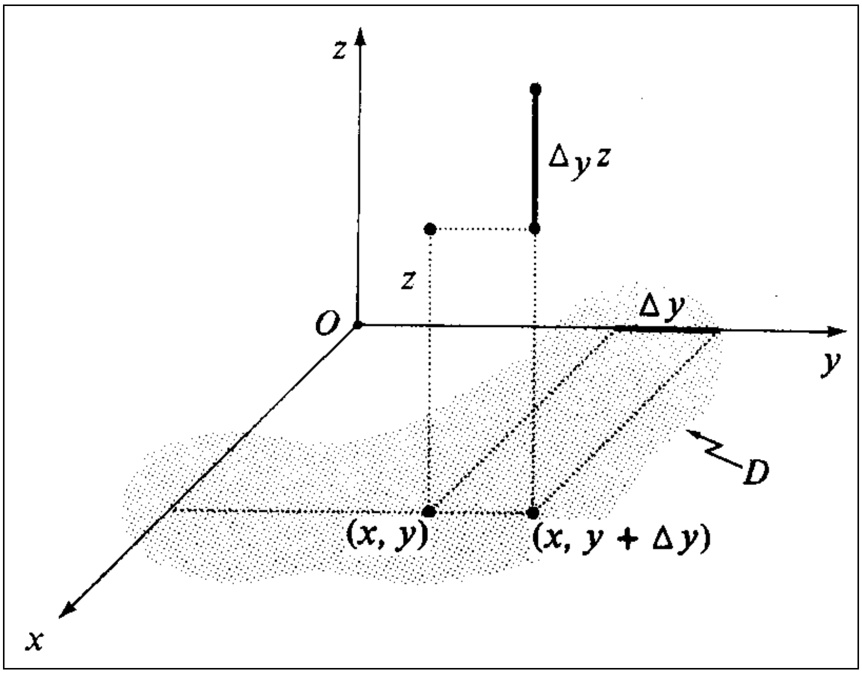
e se chama acréscimos parcial em x.




#### 3.1.2.2. Acréscimo parcial em y

Se na função $z = f(x, y)$ conservarmos $x$ constante e dermos a $y$ o acréscimo $\Delta y$, de modo a passarmos do ponto $(x, y)$ ao ponto $(x, y + \Delta y)$, também pertencente a $D$, teremos o acréscimo parcial em $y$,

$$\boxed{\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}$$



## 3.2. DERIVADAS PARCIAIS

### 3.2.1. Introdução:

Suponha que $y = f(x)$ seja uma função de apenas uma variável. Sabemos que sua **derivada**, definida por

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

pode ser interpretada com a **taxa de variação de y em relação a x**.

**Geometricamente**, a derivada de uma função $f$ num ponto $P$, representa o coeficiente angular da reta tangente a essa função no ponto considerado.

No caso de uma função $z = f(x, y)$ de duas variáveis independentes, necessitamos de instrumental matemático semelhante para trabalhar com a taxa com que $z$ muda quando ambos $x$ e $y$ variam. A idéia chave é fazer com que apenas uma variável por vez varie, enquanto a outra é mantida invariável.

Para funções de mais de duas variáveis, o procedimento é fazer com que uma delas varie enquanto todas as outras são mantidas invariáveis. Especificamente, derivamos em relação a apenas uma variável por vez, encarando todas as outras como constantes; tal procedimento nos fornece uma derivada para cada uma das variáveis independentes. Essas derivadas individuais são as peças com as quais construiremos, por exemplo, o gradiente, um dos instrumentos mais importantes, pois permite determinar a direção de máximo crescimento de uma função, por exemplo.

### 3.2.2. Definições:

Vimos anteriormente que $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$ e $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$ são os acréscimos parciais em $x$ e $y$, respectivamente. As razões $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$ e $\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$ são as razões incrementais da função $z$ em relação a $x$ e a $y$.

Os limites destas razões para $\Delta x \to 0$ na primeira e $\Delta y \to 0$ na segunda, caso existam, são as derivadas parciais da função $z = f(x, y)$.

Assim:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x,y) = D_x f(x,y)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x,y) = D_y f(x,y)$$

**Definição 1**: Se $z = f(x, y)$ é uma função de duas variáveis reais, então o limite da razão (quociente) do acréscimo parcial $\Delta_x z$, pelo incremento $\Delta x$, quando $\Delta x$ tende a zero, chama-se derivada parcial em relação a $x$ de $z = f(x, y)$, desde que o limite exista. Designa-se a derivada parcial em relação a $x$ da função $z = f(x, y)$ por uma das notações seguintes:

$$\boxed{z_x} \text{ ou } \boxed{f_x} \text{ ou } \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}} \text{ ou } \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

Em símbolos:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left( \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \right)}$$

**Nota**: O símbolo $\partial$ na notação ${}^{\partial f}\!\!/_{\partial x}$ é utilizado para enfatizar que há outra variáveis independentes e não apenas $x$.

**Definição 2**: Analogamente, define-se a derivada parcial em relação a $y$ de $z = f(x,y)$ como sendo o limite da razão do acréscimo parcial $\Delta_y z$, pelo incremento $\Delta y$, quando $\Delta y$ tende a zero, desde que o limite exista. Designa-se a derivada parcial em relação a $y$ da função $z = f(x,y)$ por uma das notações seguintes:

$$\boxed{z_y} \text{ ou } \boxed{f_y} \text{ ou } \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}} \text{ ou } \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Em símbolos:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0}\left( \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \right)}$$

**Nota**: Da mesma forma, o símbolo $\partial$ na notação ${}^{\partial f}\!\!/_{\partial y}$ é utilizado para enfatizar que há outra variáveis independentes e não apenas $y$.

**Observações**:

1) Na prática, podemos também definir as derivadas parciais em relação a x e y da função $z = f(x,y)$ do seguinte modo:

- "chama-se derivada parcial da função $z = f(x,y)$, em relação a $x$, à derivada em relação a $x$ calculada supondo $y$ constante."

- "chama-se derivada parcial da função $z = f(x,y)$, em relação a $y$, à derivada em relação a $y$ calculada supondo $x$ constante."

2) Resulta das definições anteriores, que as regras de cálculo das derivadas parciais são as mesmas empregadas para calcular a derivada das funções de uma variável; é preciso, somente, ter-se atenção em relação a que variável se efetua a derivação.

**Exemplos**:

1) Determine a derivada parcial de $f(x,y) = x^2 + y^2$ em relação a $x$ e a $y$.

**Solução**:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y \end{cases}$$

2) Calcule as derivadas parciais das funções a seguir:

a) $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ b) $f(x,y)=3x^3+5y^4$ c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

**Solução**:

a) $f(x,y)=x^2+xy+y^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x+2y \end{cases}$ b) $f(x,y)=3x^3+5y^4 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=9x^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=20y^3 \end{cases}$

c) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

3) Determine as derivadas parciais de $f(x,y)=x^2y^2-3xy+4$.

**Solução**:

$$f(x,y)=x^2y^2-3xy+4 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy^2-3y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x^2y-3x \end{cases}$$

4) Determine as derivadas parciais da função: $z=(x^2-xy+y^2)^4$.

**Solução**:

Notemos a existência das componentes potência e base. Então:

$$z=(x^2-xy+y^2)^4 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=4(x^2-xy+y^2)^3.(2x-y) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=4(x^2-xy+y^2)^3.(-x+2y) \end{cases}$$

5) Determine as derivadas parciais de $f(x,y)=\text{sen}(x+3y)-\cos(2x-y)$.

**Solução**:

$$f(x,y)=\text{sen}(x+3y)-\cos(2x-y) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos(x+3y)+2\,\text{sen}(2x-y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3\cos(x+3y)-\text{sen}(2x-y) \end{cases}$$

6) Determine as derivadas parciais de $f(x,y)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ com $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}>0$

**Solução**: Inicialmente, preparemos a função: $f(x,y)=\ln\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}=\dfrac{1}{2}[\ln(x^2-y^2)-\ln(x^2+y^2)]$

$$f(x,y)=\ln\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2xy^2}{x^4-y^4} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{2x^2y}{x^4-y^4} \end{cases}$$

**Definição 3**: Definem-se, de maneira análoga, as derivadas parciais de uma função de um número qualquer de variáveis.

Por exemplo, se tomarmos uma função $w$ de três variáveis $x, y$ e $z$, $w = f(x, y, z)$, então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0}\left(\frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}\right)$$

Por outro lado, se tomarmos uma função $u$ de quatro variáveis $x, y, z$ e $t$, $u = f(x, y, z, t)$, então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta x}\right),\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{f(x, y+\Delta y, z, t) - f(x, y, z, t)}{\Delta y}\right), \ldots$$

**Exemplos**:

1) Calcule as derivadas parciais das funções a seguir:

a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ b) $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \dfrac{1}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2}$

**Solução**:

a) $$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

b) $$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -\dfrac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \end{cases}$$

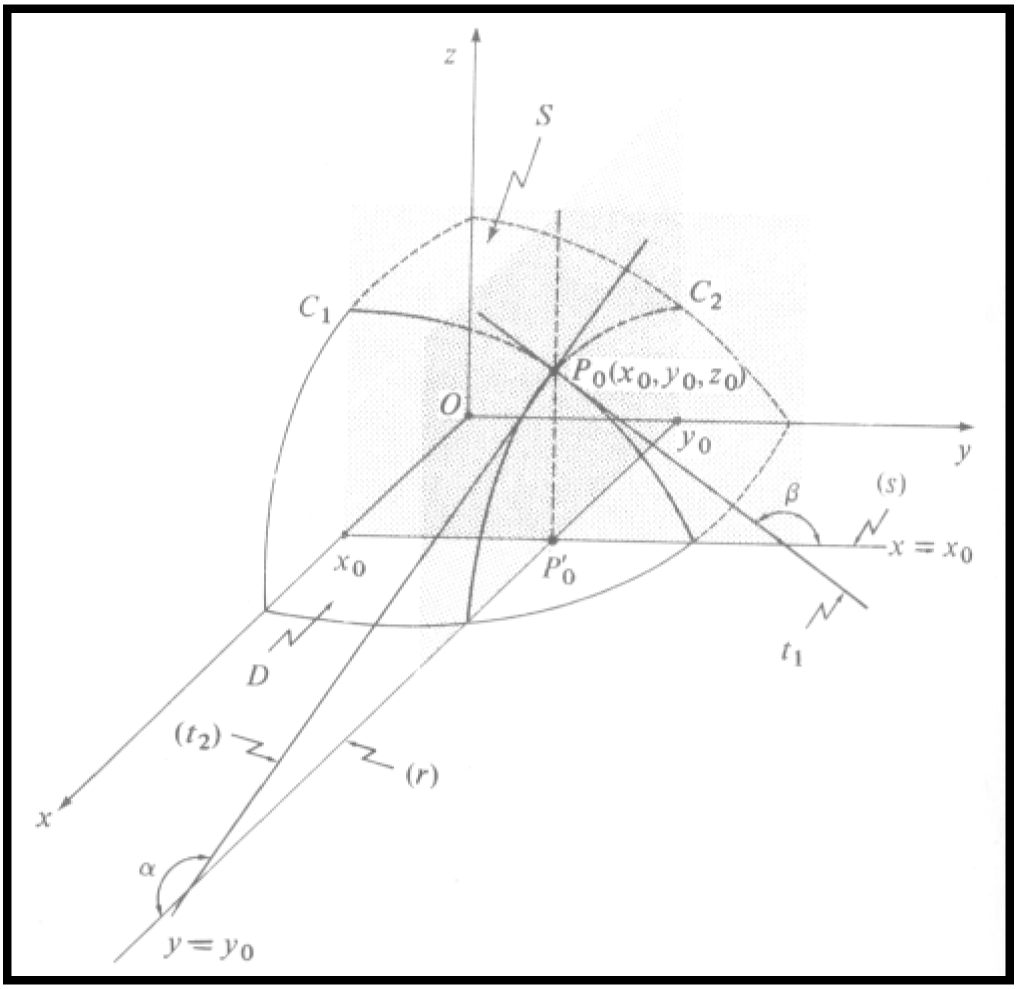
2) Determine as derivadas parciais de $f(x, y, z) = 4x^3z - 3x^2yz^2 - 4xy^2z^3 - 6y^3z^4 - y + 6$

**Solução**:

$$f(x, y, z) = 4x^3z - 3x^2yz^2 - 4xy^2z^3 - 6y^3z^4 - y + 6 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 12x^2z - 6xyz^2 - 4y^2z^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -3x^2z^2 - 8xyz^3 - 18y^2z^4 - 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 4x^3 - 6x^2yz - 12xy^2z^2 - 24y^3z^3 \end{cases}$$

## INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS DERIVADAS PARCIAIS

Seja $z = f(x, y)$ uma função definida na região $D \subset \Re^2$ tendo por imagem gráfica a superfície S do $\Re^3$ que se projeta sobre D no plano xOy.




Fixemos x, fazendo-o igual a $x_0$. A função $z = f(x_o, y)$ será unicamente da variável y e representará a curva $C_1$, intersecção do plano $x = x_0$, paralelo ao plano yOz, com a superfície S de equação $z = f(x, y)$.

Se fizermos $y = y_0$, a função $z = f(x, y_o)$ será unicamente da variável x e representará a curva $C_2$, intersecção do plano $y = y_0$, paralelo ao plano xOz, com a superfície S de equação $z = f(x, y)$.

Obtemos, assim, o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ da superfície S e intersecção das curvas $C_1$ e $C_2$.

A derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ nos fornece o coeficiente angular (decline) da reta tangente $t_2$ à curva $C_2$ no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, em relação à reta (r), paralela ao eixo dos x. $\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = tg\alpha}$

A derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ nos fornece o coeficiente angular (decline) da reta tangente $t_1$ à curva $C_1$ no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, em relação à reta (s), paralela ao eixo dos y. $\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = tg\beta}$

**DIFERENCIABILIDADE**

**Introdução**:
Sabemos que o gráfico de uma função derivável de uma variável constitui uma curva que não possui pontos angulosos, isto é, uma curva suave. Em cada ponto do gráfico temos uma reta tangente única.

Similarmente, queremos caracterizar uma função diferenciável de duas variáveis, $f(x, y)$, pela suavidade de seu gráfico. Em cada ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ do gráfico de $f$, deverá existir um único plano tangente, que representa uma "boa aproximação" de $f$ perto de $(x_0, y_0)$.

Desta forma, assim como a derivada de uma função de uma variável está ligada à reta tangente ao gráfico da função, as derivadas parciais estão relacionadas com o plano tangente ao gráfico de uma função de duas variáveis. No entanto, nesse último caso, devemos fazer uma análise bem mais cuidadosa, pois somente a existência das derivadas parciais não garante que existirá um plano tangente.

**Proposição: (Uma condição suficiente para diferenciabilidade)**
Seja $(x_0, y_0)$ um ponto do domínio da função $f(x, y)$. Se $f(x, y)$ possui derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ num conjunto aberto A que contém $(x_0, y_0)$ e se essas derivadas parciais são contínuas em $(x_0, y_0)$, então $f$ é diferenciável em $(x_0, y_0)$.

**Nota**: Essa proposição é muito útil para verificarmos que muitas das funções mais usadas no cálculo são diferenciáveis. Isso é ilustrado nos exemplos que seguem.

**Exemplos**:
1) Verificar que as funções a seguir são diferenciáveis em $\Re^2$.
a) $f(x, y) = x^2 + y^2$
**Solução**:
A função dada tem derivadas parciais em todos os pontos $(x, y) \in \Re^2$, que são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Como essas derivadas parciais são contínuas em $\Re^2$, concluímos que $f$ é diferenciável em $\Re^2$.

b) $f(x, y) = 3xy^2 + 4x^2y + 2xy$
**Solução**:
A função dada tem derivadas parciais em todos os pontos $(x, y) \in \Re^2$, que são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 + 8xy + 2y \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy + 4x^2 + 2x$$

Como essas derivadas parciais são contínuas em $\Re^2$, concluímos que $f$ é diferenciável em $\Re^2$.

**Nota**: Observamos que o raciocínio usado nesse exemplo pode ser generalizado para qualquer função polinomial. Concluímos, então, que as funções polinomiais são diferenciáveis em $\Re^2$.

c) $f(x, \mathrm{y}) = \mathrm{sen}\,(\mathrm{xy}^2)$
**Solução**:
A função dada tem derivadas parciais em todos os pontos $(x, \mathrm{y}) \in \Re^2$, que são dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2.\cos(xy^2) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy.\cos(xy^2)$$

Como essas derivadas parciais são contínuas em $\Re^2$, concluímos que $f$ é diferenciável em $\Re^2$.

2) Verifique que as funções dadas são diferenciáveis em todos pontos de $\Re^2$, exceto na origem:
a) $f(x, \mathrm{y}) = \dfrac{x}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$
**Solução**:
Em todos os pontos $(x, \mathrm{y}) \in \Re^2, (x, \mathrm{y}) \neq (0, 0)$ a função dada tem derivadas parciais que são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

Como essas derivadas são funções racionais cujo denominador se anula apenas na origem, elas são contínuas em $\Re^2 - \{(0, 0)\}$.

Logo, $f(x, \mathrm{y})$ é diferenciável em todos os pontos de $\Re^2$, exceto na origem.

b) $f(x, \mathrm{y}) = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$
**Solução**:
Em todos os pontos $(x, \mathrm{y}) \in \Re^2, (x, \mathrm{y}) \neq (0, 0)$ a função dada tem derivadas parciais que são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Como essas derivadas são funções racionais cujo denominador se anula apenas na origem, elas são contínuas em $\Re^2 - \{(0, 0)\}$.

Logo, $f(x, \mathrm{y})$ é diferenciável em todos os pontos de $\Re^2$, exceto na origem.

**Proposição**: Se $f(x, y)$ é diferencíavel no ponto $(x_0, y_0)$, então $f$ é contínua nesse ponto.

**Lembre-se**: $|(x, y) - (x_0, y_0)|$ representa a distância de $(x, y)$ a $(x_0, y_0)$, que é dada por:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

ou seja,

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

**EQUAÇÃO DO PLANO TANGENTE**

O conceito de plano tangente a uma superfície corresponde ao conceito de reta tangente a uma curva.

**Geometricamente**, o plano tangente a uma superfície num ponto é o plano que "melhor aproxima" a superfície nas vizinhanças do ponto.

Observando a figura anterior, notamos que as duas retas tangentes $t_1$ e $t_2$, tangentes à superfície S no ponto $P_0$, determinam um plano tangente à superfície S, cuja equação geral é dada por:

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{1}$$

Como este plano passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, sua equação é satisfeita pelas coordenadas deste ponto, assim,

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \tag{2}$$

Fazendo a equação (1) menos a equação (2), temos:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{3}$$

Isolando o termo em z, vamos a:

$$z - z_0 = -\frac{a}{c}(x - x_0) - \frac{b}{c}(y - y_0) \tag{4}$$

Por outro lado, na equação (1), isolando $z$, temos: $z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}$

Calculando as derivadas parciais de $z$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{a}{c} \quad (5) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{b}{c} \quad (6)$$

Substituindo as equações (5) e (6) na equação (1), vamos a:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}.(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}.(y - y_0)$$

Portanto, a equação do plano $(\pi)$ tangente à superfície S de equação $z = f(x, y)$, no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é:

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(P_0).(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(P_0).(y - y_0)}$$

**Nota**: Por simplicidade: $\frac{\partial z}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$.

**EQUAÇÃO DA RETA NORMAL**

A reta normal $(n)$ à superfície S no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é perpendicular ao plano $(\pi)$ tangente à superfície no mesmo ponto e consequentemente perpendicular às tangentes $t_1$ e $t_2$.

O vetor diretor da reta (n), normal à superfície S é, portanto paralelo ao vetor normal do plano $(\pi)$ $\vec{v}_n = (a, \mathrm{b}, \mathrm{c})$.

A normal $n$, terá por equações: $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-x_0}{c}$

Multiplicando as três razões por (-c):

$$(-c)\frac{x-x_0}{a} = (-c)\frac{y-y_0}{b} = (-c)\frac{z-z_0}{c} \Rightarrow \frac{x-x_0}{-\frac{a}{c}} = \frac{y-y_0}{-\frac{b}{c}} = \frac{z-z_0}{-\frac{c}{c}}$$

Como: $-\dfrac{a}{c} = \dfrac{\partial z}{\partial x}(P_0)$ e $-\dfrac{b}{c} = \dfrac{\partial z}{\partial y}(P_0)$, temos:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(P_0)} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(P_0)} = \frac{z-z_0}{-1}}$$

**Nota**: Essa equação é chamada de equação simétrica ou equação paramétrica da reta.

**Exemplos**:

1) Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície $z = x^2 - 4y^2$ no ponto $P(5,-2)$.

**Solução**:

Inicialmente, determinemos o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, fazendo: $z_0 = (\underbrace{5}_{x_0})^2 - 4.(\underbrace{-2}_{y_0})^2 = 25 - 16 = 9$.

Assim, $P_0(5,-2,9)$.

As funções derivadas parciais são: $z = x^2 - 4y^2 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -8y \end{cases}$

Aplicando estas derivadas no ponto $P_0$, temos: $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}(P_0) = 2.5 = 10 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(P_0) = -8.(-2) = 16 \end{cases}$

Como a equação do plano tangente é dada por: $z - z_0 = \dfrac{\partial z}{\partial x}(P_0).(x-x_0) + \dfrac{\partial z}{\partial y}(P_0).(y-y_0)$, temos:

$$z - 9 = 10(x-5) + 16(y+2) \Rightarrow z - 9 = 10x - 50 + 16y + 32 \Rightarrow \boxed{10x + 16y - z - 9 = 0}$$

Por outro lado, a equação da normal é dada por: $\dfrac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x_0}(P_0)} = \dfrac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y_0}(P_0)} = \dfrac{z-z_0}{-1}$, logo:

$$\boxed{\frac{x-5}{10}=\frac{y+2}{16}=\frac{z-9}{-1}}$$

2) Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície $z^2 = x^2 + y^2$ no ponto $P_0(3,4,5)$.

**Solução**:

Determinemos as derivadas parciais no ponto. De $z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (z = 5 > 0)

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}.2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}(P_0) = \dfrac{3}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}.2y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y}(P_0) = \dfrac{4}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

Sabemos que a equação do plano tangente $(\pi)$ à superfície z no ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é:

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(P_0).(x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(P_0).(y-y_0)$$

Logo, $z-5 = \frac{3}{5}(x-3)+\frac{4}{5}(y-4) \Rightarrow 5z-25 = 3x-9+4y-16 \Rightarrow \boxed{3x+4y-5z=0}$

Por outro lado, sabemos que as equação da normal $(n)$ são: $\dfrac{x-x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}(P_0)} = \dfrac{y-y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}(P_0)} = \dfrac{z-z_0}{-1}$, temos:

$$\frac{x-3}{\frac{3}{5}} = \frac{y-4}{\frac{4}{5}} = \frac{z-5}{-1} \Rightarrow \boxed{\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{-5}}$$

3) Determine o ponto da superfície $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9$ em que o plano tangente é paralelo ao plano ao plano cartesiano xOy.

**Solução**:

Se o plano tangente à superfície z for paralelo ao plano xOy, as derivadas parciais de z serão nulas.

$$z \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x-4=0 \Rightarrow x=2 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y-6=0 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

Calculemos z: $z = 4+9-8-18+9 \Rightarrow z = -4$

Portanto, o ponto procurado é $P_0(2,3,-4)$.

**Definição:**

Seja $f:\Re^2 \to \Re$ diferenciável no ponto $(x_0, y_0)$. Chamamos plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ao plano dado pela equação

$$\boxed{z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0)}$$

**Exemplos**:

1) Determinar, se existir, o plano tangente ao gráfico da função $z = x^2 + y^2$ nos pontos $P(0,0,0)$ e $P(1,1,2)$

**Solução**:

Essa função é diferenciável em todos os pontos de $\Re^2$. Seu gráfico representa uma superfície "suave", que possui plano tangente em todos os seus pontos.

a) Em $P(0,0,0)$

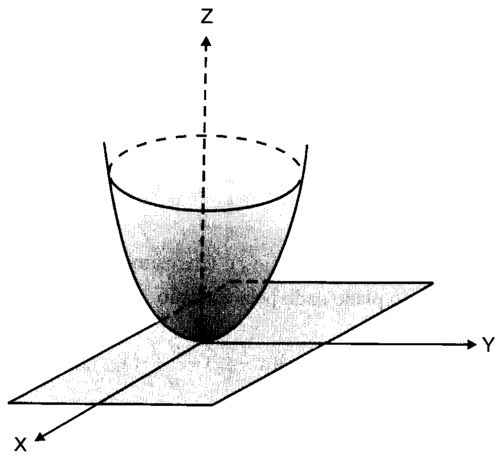
Cálculo das derivadas parciais:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Substituindo $P(0,0,0)$ na equação do plano tangente, obtemos:

$$z - 0 = 2.0.(x-0) + 2.0.(y-0) \Rightarrow \boxed{z = 0}$$

Geometricamente, temos:




b) Em $P(1,1,2)$

As derivadas parciais são as mesmas, ou seja,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

Substituindo $P(1,1,2)$ na equação do plano tangente, obtemos:

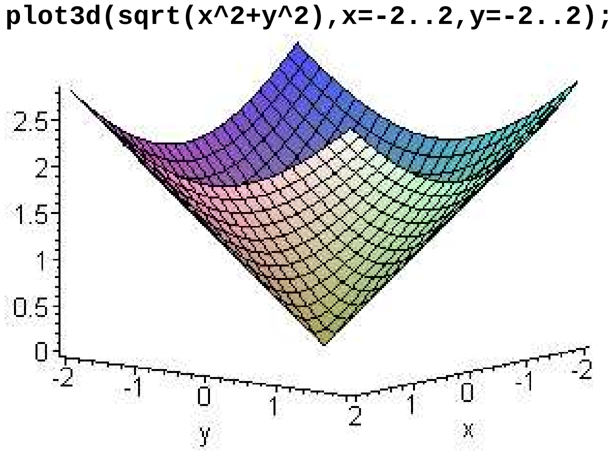
$$z - 2 = 2.1.(x-1) + 2.1.(y-1)$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{2x + 2y - z - 2 = 0}$$

2) Determinar, se existir, o plano tangente ao gráfico da função $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ no ponto $P(0,0,0)$.

```
> plot3d(sqrt(x^2+y^2),x=-2..2,y=-2..2);
```




O gráfico da função $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, apresenta um ponto anguloso na sua origem, $P(0,0,0)$, não admitindo plano tangente neste ponto. Essa função não tem derivadas parciais em $(0,0)$, não sendo diferenciável nesse ponto.

3) Determinar, se existir, o plano tangente ao gráfico da função $z = \sqrt{2x^2 + y^2}$ no ponto $P(1, 1, \sqrt{3})$.

**Solução**:

Essa função é diferenciável em todos os pontos de $\Re^2 - (0, 0)$.

Suas derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + y^2}} \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{2x^2 + y^2}}$$

Substituindo $P(1, 1, \sqrt{3})$ na equação do plano tangente, obtemos:

$$z - \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}.(x-1) + \frac{1}{\sqrt{3}}.(y-1) \Rightarrow \boxed{2x + y - \sqrt{3}z = 0}$$

**Nota**: Observemos que, usando o produto escalar de dois vetores, a equação do plano tangente pode ser reescrita como

$$z - f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) . \left( x - x_0,\ y - y_0 \right)$$

O vetor $\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$, formado pelas derivadas parciais de 1ª ordem de $f$, tem propriedades interessantes que serão vistas a seguir.

**VETOR GRADIENTE**

**Definição**:

Seja $f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais de 1ª ordem no ponto $(x_0, y_0)$. O gradiente de $f$ no ponto $(x_0, y_0)$, denotado por $grad\ f(x_0, y_0)$ ou $\nabla\ f(x_0, y_0)$ é um vetor cujas componentes são as derivadas parciais de 1ª ordem de $f$ nesse ponto. Ou seja,

$$\boxed{\nabla\ f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)}$$

**Nota**: "$\nabla$": lê-se: nabla

Geometricamente, interpretamos $\nabla\ f(x_0, y_0)$ como um vetor aplicado no ponto $(x_0, y_0)$, isto é, transladado paralelamente da origem para o ponto $(x_0, y_0)$.

Se estamos trabalhando com um ponto genérico $(x, y)$, usualmente representamos o vetor gradiente por

$$\boxed{\nabla\ f = \left( \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y} \right)}$$

Analogamente, definimos o vetor gradiente de funções de mais de duas variáveis. Por exemplo, para três variáveis $w = f(x, y, z)$, temos:

$$\boxed{\nabla\ w = \left( \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)}$$

**Exemplos**:

1) Determinar o vetor gradiente das funções:

a) $z = 5x^2y + \dfrac{y^2}{x}$ **Resposta**: $\nabla z = \left(10xy - \dfrac{y^2}{x^2}, 5x^2 + \dfrac{2y}{x}\right)$

b) $w = xyz^2$ **Resposta**: $\nabla w = \left(yz^2, xz^2, 2xyz\right)$

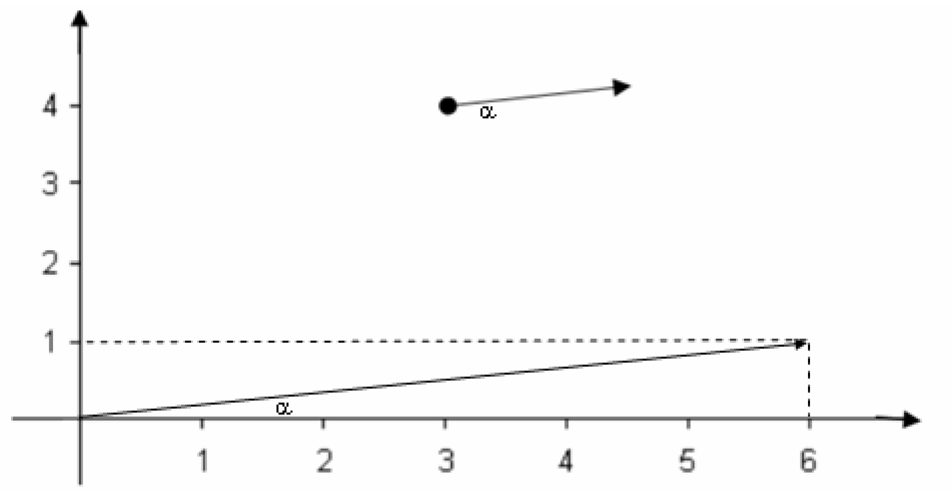
2) Determinar o vetor gradiente da função $f(x,y) = x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$ no ponto $(1,3)$.

**Resposta**: $\nabla f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (2x, y) \Rightarrow \nabla f(1,3) = (2,3)$

3) Determinar o vetor gradiente da função $g(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ em $P(0,0)$.

**Resposta**: $\nabla g(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \left(-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, -\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) \Rightarrow \nabla g(0,0) = (0,0)$

4) Determinar o vetor gradiente da função $f(x,y) = x^2 + y$ em $P(3,4)$.
**Resposta**: $\nabla f(3,4) = (6,1)$



## DERIVADAS PARCIAIS SUCESSIVAS (ORDEM SUPERIOR)

Se $f$ é uma função de duas variáveis, então, em geral, suas derivadas parciais de 1ª ordem são, também, funções de duas variáveis. Se as derivadas dessas funções existem, elas são chamadas derivadas parciais de 2ª ordem de $f$. As derivadas parciais das derivadas de 2ª ordem, se existirem, constituirão as derivadas parciais de 3ª ordem; e assim sucessivamente (*and so on*).

Para uma função $z = f(x, y)$ temos quatro derivadas parciais de 2ª ordem. A partir da derivada de $f$ em relação a $x$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, obtemos as seguintes derivadas parciais de 2ª ordem:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}$$

Por outro lado, a partir da derivada de $f$ em relação a $y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, obtemos

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$

**Exemplos**:

1) Dada a função $f(x, y) = x^3 y + x^2 y^4$, determine suas derivadas parciais de 2ª ordem.

**Solução**:

As derivadas parciais de 1ª ordem de $f$ são:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + 2xy^4 \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 4x^2 y^3$$

A partir de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(3x^2 y + 2xy^4) = 6xy + 2y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(3x^2 y + 2xy^4) = 3x^2 + 8xy^3$$

A partir de $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, obtemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^3 + 4x^2 y^3) = 3x^2 + 8xy^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}(x^3 + 4x^2 y^3) = 12x^2 y^2$$

Observe que: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

2) Dada a função $f(x, y) = xy^3 + x^4 y^2$, determine suas derivadas parciais de 2ª ordem e verifique se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

**Solução**:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 + 4x^3 y^2 \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + 2x^4 y: \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 y^2; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy + 2x^4 \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3y^2 + 8x^3 y$$

3) Dada a função $z = x^4 - 3x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 - 6y^4 + 2$, determine as derivadas parciais de 2ª ordem.

**Solução**:

$$z \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 9x^2y + 12xy^2 - 4y^3 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 18xy + 12y^2 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -9x^2 + 24xy - 12y^2 \end{cases} \\ \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x^3 + 12x^2y - 12xy^2 - 24y^3 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12x^2 - 24xy - 72y^2 \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9x^2 + 24xy - 12y^2 \end{cases} \end{cases}$$

Observe que: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

4) Dada a função $f(x, y) = \text{sen}(2x + y)$, determine suas derivadas parciais de 2ª ordem.

**Solução**:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\cos(2x + y) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(2x + y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4\,\text{sen}(2x + y)\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2\,\text{sen}(2x + y)\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2\,\text{sen}(2x + y) \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\text{sen}(2x + y)$$

Observe que: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

5) Dada a função $f(x, y) = \cos(2x + y)$, determine suas derivadas parciais de 2ª ordem e verifique se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

**Solução**:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2sen(2x + y) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = -sen(2x + y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4\cos(2x + y)\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\cos(2x + y) \text{ e}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2\cos(2x + y)$$

6) Dada a função $f(x, y) = e^{2x+3y}$, determine suas derivadas parciais de 2ª ordem.

**Solução**:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x+3y} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 3e^{2x+3y} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4e^{2x+3y}\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9e^{2x+3y} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6e^{2x+3y}$$

Observe que, nos exemplos anteriores as derivadas parciais mistas de 2ª ordem, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ são iguais. Isso ocorre para a maioria das funções que aparecem na prática. Essa igualdade é conhecida como teorema de Schwartz, enunciado a seguir.

## TEOREMA DE SCHWARTZ: INVERTIBILIDADE DA ORDEM DE DERIVAÇÃO

Seja $z = f(x, y)$ uma função com derivadas parciais de 2ª ordem contínuas num conjunto aberto $A \subset \Re^2$, então: $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)}$, para todo $(x_0, y_0) \in A$.

**Nota**: Esse teorema se estende às derivadas mistas de ordem superior à 2ª.

**Exemplo**:

1) Verificar a condição de igualdade de derivadas parciais do Teorema de Schwartz para as funções:

a) $z = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ **Resposta**: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{6xy^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)^3}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$

b) $z = x.e^{x+y^2}$ **Resposta**: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1 + x).2ye^{x+y^2}$

## OUTRAS NOTAÇÕES USADAS PARA REPRESENTAR AS DERIVADAS

Existem outras notações, além da apresentada, que costumam ser usadas para representar as derivadas parciais de 1ª ordem.

A derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ também é representada por: $\boxed{f_x(x, y)}$ $\boxed{D_x f(x, y)}$ $\boxed{D_1 f(x, y)}$

A derivada $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ também é representada por: $\boxed{f_y(x, y)}$ $\boxed{D_y f(x, y)}$ $\boxed{D_1 f(x, y)}$

Por outro lado, para as derivadas parciais de 2ª ordem temos:

Para a derivada $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ temos as seguintes representações: $\boxed{f_{xx}(x, y)}$ $\boxed{D_{xx} f(x, y)}$ $\boxed{D_{11} f(x, y)}$

Para derivada $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ temos as seguintes representações: $\boxed{f_{xy}(x, y)}$ $\boxed{D_{xy} f(x, y)}$ $\boxed{D_{12} f(x, y)}$

Para a derivada $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ temos as seguintes representações: $\boxed{f_{yx}(x, y)}$ $\boxed{D_{yx} f(x, y)}$ $\boxed{D_{21} f(x, y)}$

Para a derivada $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ temos as seguintes representações: $\boxed{f_{yy}(x, y)}$ $\boxed{D_{yy} f(x, y)}$ $\boxed{D_{22} f(x, y)}$

É importante notar que, nas últimas notações introduzidas, a ordem de derivação é lida da esquerda para a direita, ao contrário da notação introduzida anteriormente. Podemos ver que isto é razoável, observando as expressões que originaram as correspondentes notações.

Por exemplo, $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)}$, enquanto $\boxed{f_{xy} = \left(f_x\right)_y}$ ou $\boxed{D_{xy} f = D_y\left(D_x f\right)}$.

**Nota**: Para as derivadas de mais alta ordem, essas notações são estendidas de maneira natural. Por exemplo, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) = \left(f_{zy}\right)_x = f_{zyx}$

**DEFINIÇÃO**:

Uma função de várias variáveis $y = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ dir-se-á de classe $C^n$ em uma região $D \subset \Re^m$, com n inteiro positivo $(n \in Z_+^*)$, se e somente se existirem e forem contínuas em D as derivadas parciais de $f$ de ordem $1, 2, 3, ..., n$. Escrevemos: $f \in C^n$ (classe de diferenciabilidade).

## EQUAÇÃO DE LAPLACE OU EQUAÇÃO HARMÔNICA

Sabe-se que a equação que rege o fluxo de calor é dada por:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

onde $T$ é a temperatura num ponto $(x, y)$ e no instante de tempo $t$ e $c > 0$ é uma constante característica do material de que é feita a placa.

No equilíbrio térmico $T$ não varia com o tempo e, portanto, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Desta forma, a equação se torna:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

De forma análoga, para o $\Re^3$ (tridimensional ou 3 variáveis), temos: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$.

**Definição**:

- Uma função $z = f(x, y)$ diz-se harmônica quando satisfaz à equação de Laplace: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

- Uma função $w = f(x, y, z)$ diz-se harmônica quando satisfaz à equação de Laplace: $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$

**Nota**: Essas equações são exemplos de equações diferenciais parciais (conhecidas como EDP, e de grande aplicabilidade).

- A equação $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, pode aparecer em problemas de eletricidade, calor, aerodinâmica, teoria do potencial e em muitos outros campos.

- Por outro lado, a equação $\frac{\partial U}{\partial t} = k \cdot \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)$ aparece na teoria da condução, bem como na difusão de nêutrons em uma pilha atômica para a produção de energia nuclear.

- E ainda, a equação $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ aparece no estudo de vibração de cordas ou fios, bem como na propagação de sinais elétricos.

**Exemplos**:
1) Verifique que a função $z = e^x . sen\ y$ é harmônica.

**Solução**:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^x sen\, y;\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^x \cos y \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x sen\, y;\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x sen\, y \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^x sen\, y - e^x sen\, y = 0 \text{ (c.q.d)}$$

2) Verifique que a função $z = e^y . cos\ x$ é harmônica.

**Solução**:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -e^y sen\, x;\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^y \cos x \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -e^y \cos x;\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^y \cos x \end{array}\right. \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^y \cos x + e^y \cos x = 0 \text{ (c.q.d)}$$

3) Verifique que a função $z = e^x .\text{sen}\ y + e^y . cos\ x$ é harmônica.

**Solução**:

Observe que este exemplo é a soma dos exemplos 1 e 2, assim, de forma direta, temos:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^x sen\, y - e^y \cos x - e^x sen\, y + e^y \cos x = 0 \text{ (c.q.d)}$$

**Nota**: A derivada de uma função harmônica é uma função harmônica. Da mesma forma, a soma de funções harmônicas é uma função harmônica.

## LISTA DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS PARA A REVISÃO DOS CONCEITOS

1) Calcule as derivadas parciais das funções a seguir:

a) $z = x^2 .\text{sen } y$

b) $f(x, y) = x^2 + 3xy - 4y^2$

c) $z = \text{sen}(3x) . \cos(2y)$

d) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x + y + z}$

**Resposta**:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\,seny; \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y; \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x - 8y$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3\cos(3x)\cos(2y); \dfrac{\partial z}{\partial y} = -2\,sen(3x)\,sen(2y)$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz}{(x + y + z)^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y^2 - x^2 - z^2 + 2xy + 2yz}{(x + y + z)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{z^2 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz}{(x + y + z)^2}$

2) Determinar as derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ das funções abaixo:

a) $z = x^2 + 3y^2 + 4xy + 1$

b) $z = x^2 \text{ sen } (2xy)$

c) $z = e^{x^2 - 2y^2 + 4x}$

d) $z = \dfrac{1}{x + 2y + 1}$

**Resposta**:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4y; \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4x + 6y$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\,sen(2xy) + 2x^2 y\cos(2xy) = 2x \cdot [sen(2xy) + xy\cos(2xy)]; \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 \cos(2xy)$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (2x + 4) \cdot e^{x^2 - 2y^2 + 4x}; \dfrac{\partial z}{\partial y} = -4y \cdot e^{x^2 - 2y^2 + 4x}$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{1}{(x + 2y + 1)^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2}{(x + 2y + 1)^2}$

3) Dado o ponto $P(-1, 4)$ e $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, calcule:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,4)$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,4)$

**Resposta**:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,4) = -\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,4) = \dfrac{4\sqrt{17}}{17}$

4) Demonstrar que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} = 1$, se $f(x, y, z) = x + \dfrac{x - y}{y - z}$

5) Calcule as derivadas parciais da função $f(x, y, z, t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$

**Resposta**:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}}; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}}; \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}}; \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{t}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}}$$

6) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva de intersecção da superfície $f(x,y) = 4x^2y - xy^3$ com o plano $y = 2$ no ponto $P_0(3,2,48)$.

**Resposta**: $\frac{\partial f}{\partial x}(3,2) = 40$.

7) Encontre o coeficiente angular da reta tangente à curva de intersecção da superfície $f(x,y) = 4x^2y - xy^3$ com o plano $x = 3$ no ponto $P_0(3,2,48)$.

**Resposta**: $\frac{\partial f}{\partial y}(3,2) = 0$.

8) A função T(x, y) = 60 – 2x$^2$ – 3y$^2$ representa a temperatura em qualquer ponto de uma chapa. Encontrar a razão de variação da temperatura em relação a distância percorrida ao longo da placa na direção dos eixos positivos x e y, no ponto (1, 2). Considerar a temperatura medida em graus Celsius e a distância em cm.

**Resposta**: $\frac{\partial T}{\partial x}(1,2) = -4^0 C/cm$; $\frac{\partial T}{\partial y}(1,2) = -12^0 C/cm$

9) Determine as derivadas parciais de 1ª ordem da função $z = xye^{xy}$.

**Resposta**: $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}(1+xy)$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}(1+xy)$

10) Se $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ verifique que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$

11) Determine as derivadas parciais de 2ª ordem da função: $z = \frac{y^2}{x} - \frac{x^2}{y}$

**Sugestão**: Prepare a função: $z = \frac{y^2}{x} - \frac{x^2}{y} \Rightarrow z = x^{-1}.y^2 - x^2.y^{-1}$

**Resposta**: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{x^3} - \frac{2}{y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x} - \frac{2x^2}{y^3}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2y}{x^2} + \frac{2x}{y^2}$

12) Determine as derivadas parciais de 2ª ordem da função $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

**Resposta**: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$

13) Determinar as derivadas parciais de 2ª ordem das seguintes funções:

a) $z = x^2 - 3y^3 + 4x^2y^2$ b) $z = x^2y^2 - xy$ c) $z = \ln xy$ d) $z = e^{xy}$

**Resposta**: a) $2 + 8y^2$; $16xy$; $16xy$; $-18y + 8x^2$ b) $2y^2$; $4xy - 1$; $4xy - 1$; $2x^2$

c) $-\frac{1}{x^2}$; $0$; $0$; $-\frac{1}{y^2}$ d) $y^2e^{xy}$; $e^{xy}.(1+xy)$; $e^{xy}.(1+xy)$; $x^2e^{xy}$

14) Se $z = f(x,y)$ tem derivadas parciais de 2ª ordem contínuas e satisfaz a equação de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, ela é dita uma função harmônica. Verificar se as funções dadas são harmônicas:

a) $z = y^3 - 3x^2y$ b) $z = x^2 + 2xy$ c) $z = e^x \cos y$

**Resposta**: a) Sim b) Não c) Sim

15) Verifique que a função $w = e^{3x+4y}.\cos 5z$ é harmônica.

16) Mostre que $x.\dfrac{\partial z}{\partial x} + y.\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$ para $z = xy + x.e^{\frac{y}{x}}$ .

17) Determine, em cada caso, as derivadas parciais da função:

a) $z = x^3y^2 + x^2 \ln y - \cos xy$ **Resposta**: $z \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 2x\ln y + y\,\mathrm{sen}\, xy \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + \dfrac{x^2}{y} + x\,\mathrm{sen}\, xy \end{cases}$

b) $z = xe^{x-y} + ye^{x+y}$ **Resposta**: $z \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = (1+x)e^{x-y} + ye^{x+y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = (1+y)e^{x+y} - xe^{x-y} \end{cases}$

c) $z = x^2 \ln xy$ **Resposta**: $z \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x\ln xy + x \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{y} \end{cases}$

18) Calcule $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ para $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$. **Resposta**: $\boxed{r}$

19) Verifique se para $w = (x-y).(y-z).(z-x)$ tem-se $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$

20) Determine a equação do plano tangente e a equação da reta normal da superfície $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ no ponto $P(5,3)$.

**Resposta**: Equação do plano: $5x - 3y - 4z = 0$ ,

Equação da reta normal: $\dfrac{x-5}{5} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z-4}{-4}$