MATEMÁTICA

ANÁLISE COMBINATÓRIA, ARRANJOS E PERMUTAÇÕES

Livro Eletrônico

SUMÁRIO

Nesta aula, tratarei de um dos assuntos mais bonitos da Matemática: a análise combinatória e probabilidade, um dos temas favoritos do seu professor. Há uma probabilidade grande de que seja também um dos temas favoritos do seu examinador.

Sempre que esse assunto está previsto no edital, pode esperar, pelo menos, uma questão na sua prova.

As questões desse assunto dependem de poucas fórmulas e muito raciocínio. Basta você pegar o jeito que não perderá nenhuma questão.

Por fim, gostaria de me colocar à sua disposição para responder a todas as suas dúvidas no fórum.

1. Princípio Fundamental da Contagem

Arrisco-me a dizer que é aqui que se concentram a maior parte das questões desse assunto. Posso dizer, ainda, que absolutamente tudo pode ser derivado desse importante princípio.

É por isso que precisamos dominá-lo. Entender perfeitamente o que ele quer dizer é a chave para o seu sucesso em análise combinatória.

Se um processo tem duas etapas, em que a primeira etapa pode ser feita de m formas, e a segunda etapa pode ser feita de n formas, o processo total pode ser feito de m.n formas.

O princípio fundamental da contagem estabelece que, se você tem 2 calças e 3 camisas, você pode se vestir, isto é, colocar uma calça **E** uma camisa – de 2.3 = 6 maneiras diferentes. Daqui a pouco você entenderá por que destaquei o **E.**

Gostaria que você aprendesse o seguinte sistema para calcular.

2	**x**	**3**	**= 6**
Calças	**E**	**Camisas**	**Total**

Agora, ilustrarei o exemplo para que você visualize que realmente existem seis opções de vestir 2 calças e 3 camisas.

Como falei, para se vestir você precisa de uma calça (2 opções) **E** de uma camisa (3 opções).

E mais três formas de você se vestir com a segunda calça.

Outra observação importante a fazer sobre o princípio fundamental da contagem é quando há uma sentença com **OU.**

Questão Inédita

Questão 1 Bruna tem 4 camisas, 2 calças, 1 saia e 3 sapatos. De quantas formas diferentes ela pode se vestir?

Resolução

Para se vestir, Bruna precisa de:

- uma camisa **E**;
- uma calça **OU** uma saia... **E;**
- um sapato.

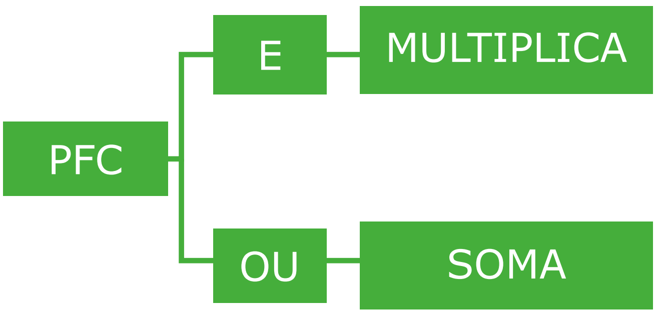
Como Bruna pode usar 2 calças ou 1 saia, tem 3 opções para essa categoria de roupas. É justamente a soma.

4	**x**	**2+1**	**x**	**3**	**= 6**
camisas	**e**	**saias ou calças**		**sapatos**	**total**

Portanto, o número de formas que Bruna poderá se vestir é:

$$N=4.(2+1).3=4.3.3=36$$

Dessa maneira, podemos relacionar o princípio fundamental da contagem com as conjunções **E** e **OU**. O bom uso dessas conjunções é capaz de resolver muitos problemas.



Direto do concurso

QUESTÃO 2 (PGE-RO/2015/TÉCNICO DA PROCURADORIA) Quatro processos, numerados de 1 a 4, deverão ser distribuídos entre três procuradores: Átila, Hércules e Ulisses. Um mesmo procurador pode receber até quatro processos, exceto o procurador Átila, que não pode receber o processo número 2.

O número de maneiras diferentes de se fazer tal distribuição é:

a) 81

b) 64

c) 54

d) 11

e) 8

Resolução

Letra c.

Para cada um dos processos, exceto o 2, há 3 opções de procuradores. Para o processo número 2, podemos escolher qualquer um dos outros 2 procuradores, exceto Átila.

Precisamos escolher um procurador dentre 3 para o processo 1 **E** um procurador dentre 2 para o processo 2 **E** um procurador dentre 3 para o processo 3 **E** um procurador dentre 3 para o processo 4.

3	x	2	x	3	x	3	= 54
1		**2**		**3**		**4**	**Total**

Questão 3 (ESAF/FUNAI/2016) Considere as quatro letras A, C, G e T formando pares de letras nos quais A só forma par com T e C só forma par com G. Indique quantas sequências distintas de três pares ordenados de letras e com repetição podem ser formadas.

a) 4
b) 8
c) 16
d) 32
e) 64

Resolução

Letra e.

A sequência de pares ordenados a que se refere o problema, na verdade, se refere às bases nitrogenadas que compõem o DNA.

Como dito pelo enunciado, a primeira base do par já determina automaticamente a segunda. São quatro possibilidades para a primeira base de cada par (A, C, G ou T), mas, para a segunda base, só existe uma possibilidade. Se a primeira base for A, a segunda necessariamente é T; se a primeira base for C, a segunda necessariamente é G. E, assim, por diante.

Portanto:

4.1	**x**	**4.1**	**x**	**4.1**	**= 4.4.4 = 64**
Par 1		**Par 2**		**Par 3**	**Total**

QUESTÃO 4 (FGV/DPE-RO/2015/TÉCNICO DA DEFENSORIA PÚBLICA) Considere todas as placas de veículos desde NCD-4000 até NCD-9999. O número de placas que possuem os dígitos todos diferentes é:

a) 2.520
b) 3.024
c) 3.528
d) 3.786
e) 4.032

Resolução

Letra b.

Questão muito inteligente. Perceba que as letras das placas já foram definidas. Elas só podem ser NCD. Portanto, não nos preocuparemos com elas.

Para que uma placa esteja entre 4000 e 9999, o primeiro algarismo deve ser igual ou maior que 4. São, portanto, seis opções (4, 5, 6, 7, 8 e 9).

6	**x**		**x**		**x**		
							Total

Para o segundo algarismo, podemos escolher qualquer número que ainda não foi escolhido. São, portanto, 9 opções, porque não podemos escolher o número que foi escolhido para o primeiro algarismo.

6	**x**	**9**	**x**		**x**		
							Total

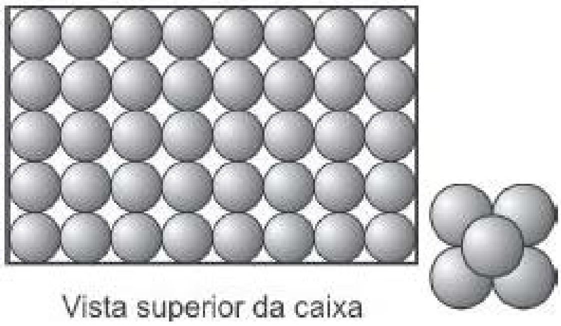
Para o terceiro algarismo, não podemos escolher nenhum dos números que já foram escolhidos para o primeiro ou para o segundo algarismo. São, portanto, duas opções a menos, restando 8 opções.

6	**x**	**9**	**x**	**8**	**x**		
							Total

Analogamente, para o quarto algarismo, não podemos escolher nenhum dos três números que já foram escolhidos. Restam, portanto, 7 opções.

6	**x**	**9**	**x**	**8**	**x**	**7**	**= 3024**
							Total

Questão 5 (FGV/MEC/2009/DOCUMENTADOR) Em uma caixa, foram colocadas 40 bolas de sinuca, dispostas sobre o fundo da caixa, como apresentado na figura. A seguir, outras bolas foram empilhadas sobre as 40 primeiras, de tal forma que cada bola sempre ficasse apoiada sobre outras quatro, como ilustrado abaixo.



Vista superior da caixa

Sabendo-se que a construção não foi desrespeitada, assinale a alternativa que apresenta a quantidade máxima possível de bolas de sinuca dentro da caixa.

a) 112

b) 100

c) 96

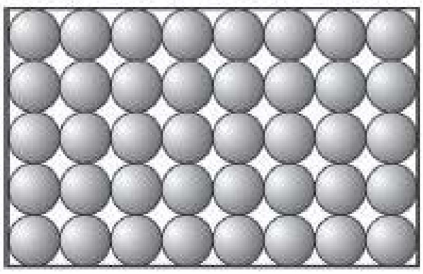
d) 86

e) 68

Resolução

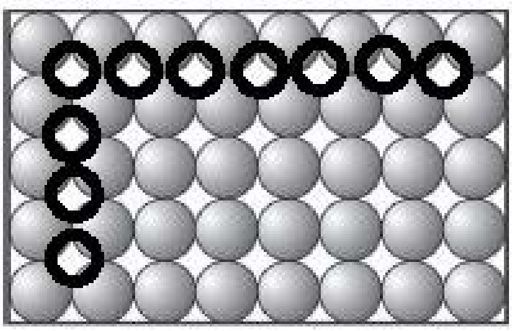
Letra b.

No piso da caixa, há 8 colunas e 5 linhas de bolas.



Vista superior da caixa

Como ilustrado pelo problema, é possível empilhar bolas nos espaços vazios deixados por essas. Perceba que só poderemos colocar 7 colunas e 4 linhas de bolas sobre essas. Essa situação está ilustrada a seguir.



No 3º andar de bolinhas, podemos empilhar, de forma análoga, mais 6 colunas e 3 linhas. No 4º andar, podemos empilhar mais 5 colunas e 2 linhas. Por fim, chegamos ao quinto andar, onde podemos empilhar mais 4 colunas e 1 linha de bolinhas. Não é possível mais empilhar nada sobre o quinto andar.

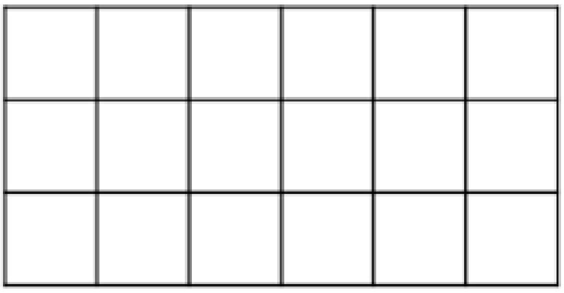
Sendo assim, o número total de bolinhas empilhadas é:

	Colunas	**Linhas**	**Total**
1º Andar	8	5	8.5 = 40
2º Andar	7	4	7.4 = 28
3º Andar	6	3	6.3 = 18
4º Andar	5	2	5.2 = 10
5º Andar	4	1	4.1 = 4
Total			40 + 28 + 18 + 10 + 4

O total de bolinhas empilhadas é, portanto:

$$N=40|28|18|10|4=100$$

QUESTÃO 6 (ESAF/AFRFB/2009) Considere um retângulo formado por pequenos quadrados iguais, conforme a figura abaixo. Ao todo, quantos quadrados de quaisquer tamanhos podem ser contados nessa figura?



a) 128

b) 100

c) 63

d) 32

e) 18

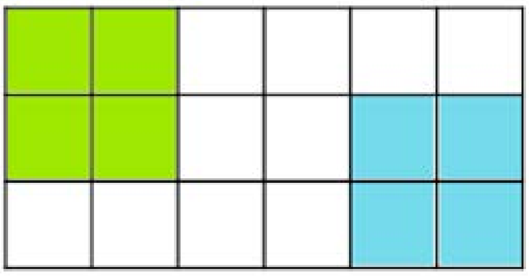
Resolução

Letra d.

Perceba que é possível formar quadrados de tamanho 1, 2 e 3 nessa figura.

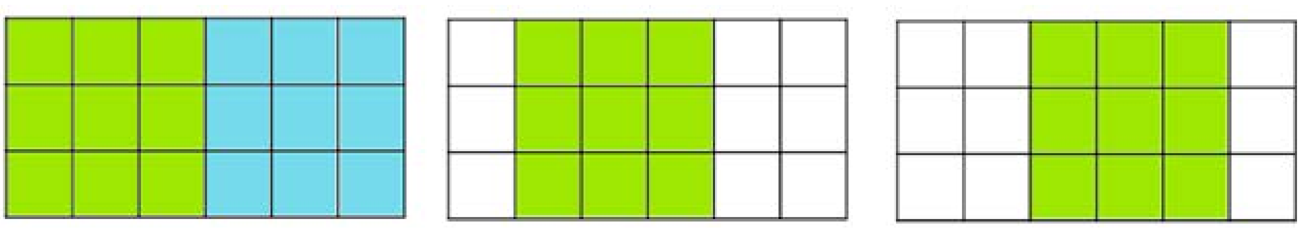
Para os quadrados de tamanho 1, podemos escolher qualquer uma das 6 colunas e qualquer uma das 3 linhas. São, portanto, 6.3 = 18 possibilidades.

Para os quadrados de tamanho 2, já é um pouco diferente.



O quadrado azul é o último quadrado possível e ele se inicia na segunda linha e na quinta coluna. De fato, não é possível que um quadrado de tamanho 2 comece na última linha ou na última coluna, pois a figura acabaria. Sendo assim, há 5.2 = 10 possibilidades de quadrados de tamanho 2.

Por fim, para os quadrados de tamanho 3, eles só podem iniciar na primeira linha e só há quatro possibilidades de coluna. Eles não podem se iniciar nem na quinta nem na última coluna, pois, nesse caso, a figura acabaria.



Sendo assim, há 4.1 = 4 possibilidades de quadrados de tamanho 3.

Tamanho	**Colunas**	**Linhas**	**Total**
1	6	3	6.3 = 18
2	5	2	5.2 = 10
3	4	1	4.1 = 4
Total			18+10+4 = 32

Questão 7 (FCC/SEDU-ES/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) São realizados três lançamentos, em sequência, de um dado com faces numeradas de 1 a 6. Com os resultados obtidos, em cada três lançamentos, forma-se um número de três algarismos. Por exemplo: se os resultados obtidos foram, nessa ordem, 2; 6 e 3, o número formado será 263. A quantidade de números diferentes, e que sejam menores do que 500, que podemos formar dessa maneira é igual a:

a) 499.

b) 186.

c) 399.

d) 144.

e) 400.

Resolução

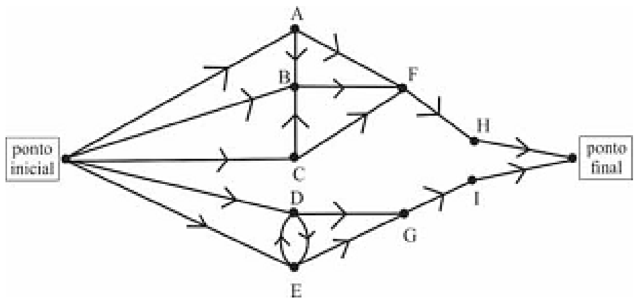
Letra d.

Como queremos os números menores que 500, a única restrição do problema é que o primeiro dado seja um dos números {1, 2, 3, 4}. São, portanto, 4 opções para o primeiro lançamento.

Tome cuidado, porque o enunciado fala em "menores do que 500", portanto, o próprio número 500 não nos interessa.

4	**x**	**6**	**x**	**6**	**= 144**
					Total

Questão 8 (CESPE/PREFEITURA DE SÃO PAULO-SP/2016/ASSISTENTE DE GESTÃO DE POLÍTICAS PÚBLICAS I) A questão da mobilidade urbana é um dos problemas que mais preocupam a população de grandes centros, como a cidade de São Paulo. A figura apresentada mostra as possibilidades de vias, em um centro urbano, para se deslocar de um ponto inicial até um ponto final, passando pelos pontos intermediários A, B, C, D, E, F, G, H ou I. Cada seta indica o sentido do fluxo de uma via ligando dois desses pontos. Dois caminhos que permitem o deslocamento desde o ponto inicial até o ponto final são denominados distintos se um deles incluir pelo menos uma via distinta. Considerando essas informações, a quantidade de caminhos distintos que permitem o deslocamento do ponto inicial até o ponto final é:



a) inferior a 7.

b) igual a 7.

c) igual a 8.

d) igual a 9.

e) superior a 9.

Resolução

Letra e.

Perceba que o primeiro passo pode levar aos pontos A, B, C, D ou E. Há, portanto, 5 opções.

Saindo dos pontos A e C, existem dois caminhos para cada um.

Saindo do ponto B, há apenas um caminho possível:

PI – B – F – H – PF

Saindo do ponto D, tem-se três caminhos possíveis:

PI – D – G – I – PF

PI – D – E – G – I – PF

PI – D – E – D – G – I – PF.

Saindo do ponto E, há dois caminhos possíveis, porém perceba o que o último deles é igual ao caminho PI – D – E – D – G – I – PF, porque inclui exatamente as mesmas vias.

PI – E – G – I – PF

PI – E – D – G – I – PF

PI – E – D – E – G – I – PF

	Passo 1	**Continuação**	**Total**
OU	1 opção (B)	1 opção	1. = 1
	2 opções (A e C)	2 opções	2.2 = 4
	2 opções (D e E)	3 opções	2.3 = 6
			1 + 4 + 6 = 11

São, portanto, 11 caminhos.

QUESTÃO 9 (FGV/SSP-AM/2015/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR) Uma urna A contém cinco bolas numeradas com os números 1, 3, 5, 7 e 9. Uma urna B também contém cinco bolas, mas numeradas com os números 0, 2, 4, 6 e 8.

Retira-se, aleatoriamente, uma bola de cada urna e somam-se os números das duas bolas.

O número de valores diferentes possíveis para essa soma é:

a) 25

b) 21

c) 17

d) 13

e) 9

Resolução

Letra e.

Agora, vamos ter que usar o PFC de uma maneira mais sutil.

Perceba que, se selecionarmos o número 1 na urna A, haverá 5 opções para a urna B. Vejamos:

1 + 0 = 1	1 + 2 = 3	1 + 4 = 5	1 + 6 = 7	1 + 8 = 9

Agora, quando selecionamos o número 3 na urna A, não há mais 5 opções, pois várias delas conduzem a somas que já foram encontradas acima. Vejamos:

3 + 0 = 3	3 + 2 = 5	3 + 4 = 7	3 + 6 = 9	3 + 8 = 11
X	X	X	X	ok

O mesmo também quando selecionamos 5, 7 e 9 na urna A. Para cada um desse números, a única novidade será se somarmos a 8. Vejamos:

5 + 8 = 13	7 + 8 = 15	9 + 8 = 17
ok	ok	ok

Podemos contar todas as opções que já encontramos e chegamos a 9. Porém, vamos montar uma tabela para utilizar em que você pode visualizar a utilização do PFC.

Precisamos selecionar uma bola da urna A **E** uma bola da urna B. Por isso, multiplicamos as opções nas urnas A e B.

	Urna A	**Urna B**	**Total**
OU	1 opção (1)	5 opções (0, 2, 4, 6, 8)	1.5 = 5
	4 opções (3, 5, 7 e 9)	1 opção (8)	4.1 = 4
			5 + 4 = 9

QUESTÃO 10 (FGV/CGE-MA/2014/AUDITOR) João lançou um dado três vezes seguidas e a soma dos resultados deu 15. O número de maneiras possíveis para a sequência dos três resultados é:

a) 3

b) 5

c) 7

d) 9

e) 10

Resolução

Letra e.

Como queremos a soma dos três dados seja igual a 15, precisamos notar que os dois primeiros dados determinam o número que deve ser obtido pelo terceiro.

Exemplo, se tiramos 6 e 6 nos primeiros dados, necessariamente, o terceiro dado será igual a 3.

Além disso, em alguns casos, não é possível obter uma soma 15 quando obtemos números muito baixos nos primeiros dados. Por exemplo, se tiramos 1 e 1, não é possível obter soma 15 com o terceiro dado. O máximo da soma seria 1 + 1 + 6 = 8.

Podemos resolver o problema de trás para frente, ou seja, primeiro decidiremos as somas possíveis para os dois primeiros dados.

Dados 1 e 2	Dado 3
≤ 8	0 opções
9 (1 opção)	6 (1 opção)

10 (1 opção)	5 (1 opção)
11 (1 opção)	4 (1 opção)
12 (1 opção)	3 (1 opção)
13 (1 opção)	2 (1 opção)
14 (1 opção)	1 (1 opção)
$\geq$ 15	0 opções

Agora, precisamos calcular o número de formas que podemos obter as somas de 9 a 14.

Para que a soma seja 9, perceba que o primeiro dado não pode ser menor que 3. São, portanto, quatro possibilidades.

3 + 6 = 9	4 + 5 = 9	5 + 4 = 9	6 + 3 = 9

Para que a soma seja 10, o primeiro dado não pode ser menor que 4. São três possibilidades.

4 + 6 = 10	5 + 5 = 10	6 + 4 = 10

Para que a soma seja 11, o primeiro dado não pode ser menor que 5. Restam, portanto, duas possibilidades.

5 + 6 = 11	6 + 5 = 11

Para que a soma seja 12, os dois primeiros dados devem ser iguais a 6. Portanto, só existe uma possibilidade. Além disso, não é possível que a soma dos dois primeiros dados seja maior que 12.

Sendo assim:

Dados 1 e 2	Dado 3	Total
9 (4 opções)	6 (1 opção)	4.1 = 4
10 (3 opções)	5 (1 opção)	3.1 = 3
11 (2 opções)	4 (1 opção)	2.1 = 2
12 (1 opção)	3 (1 opção)	1.1 = 1
		4 + 3 + 2 +1 = 10

Questão 11 (CESPE/TRE-GO/2015/TÉCNICO JUDICIÁRIO) As prestações de contas das campanhas dos 3 candidatos a governador de determinado estado foram analisadas por 3 servidores do TRE desse estado. Considerando que um servidor pode analisar nenhuma, uma ou mais de uma prestação de contas e que, por coincidência, cada um dos 3 candidatos é parente de um dos 3 servidores, julgue o item que se segue.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuírem as prestações de contas entre os 3 servidores de modo que nenhum deles analise as contas de um parente é superior a 5.

Resolução

Certo.

As contas de cada candidato podem ser avaliadas por quaisquer um dos dois servidores que não seja seu parente.

Como não há nenhum problema em um servidor analisar nenhuma ou duas contas, é só aplicar o princípio fundamental da contagem.

2	**x**	**2**	**x**	**2**	**=2.2.2=8**
					Total

QUESTÃO 12 (CESPE/MEC/2014) A análise de requerimentos de certificação de entidades educacionais, no âmbito do Ministério da Educação, será realizada por uma equipe formada por, no mínimo, um analista contábil, um analista educacional e um analista processual. Considerando essa situação hipotética, julgue os itens subsecutivos.

A partir de cinco analistas contábeis, sete analistas educacionais e seis analistas processuais, é possível formar mais de 300 equipes distintas com exatamente um analista de cada especialidade em cada equipe.

Resolução

Errado.

Aplicação direta do PFC. Há 5 opções para o analista contábil, 7 opções para o analista educacional e 6 opções para o analista processual.

5	x	7	x	6		=5.7.6 = 210
Analista Contábil		**Analista Educacional**		**Analista Processual**		**Total**

Portanto, o número de opções é menor que 300.

QUESTÃO 13 (FCC/TRF-1ª REGIÃO/2007/TÉCNICO JUDICIÁRIO/ÁREA ADMINISTRATIVA) Um técnico judiciário foi incumbido da montagem de um manual referente aos Princípios Fundamentais da Constituição Federal. Sabendo que, excluídas a capa e a contracapa, a numeração das páginas foi feita a partir do número 1 e, ao concluí-la, constatou-se que foram usados 225 algarismos, o total de páginas que foram numeradas é

a) 97

b) 99

c) 111

d) 117

e) 126

Resolução

Letra c.

Questão bem interessante. Nas páginas 1 a 9, foi usado apenas um algarismo. Portanto, um total de 9 algarismos até então.

Entre a página 10 e a 99, foram usados dois algarismos por página. Como são 90 páginas, foi necessário um total de 180 algarismos para numerá-las.

Até o momento, já foram utilizados 189 algarismos. Portanto, restam ainda 225-189 = 36.

A partir da página 100, vão ser necessários três algarismos por página. Portanto, os 36 algarismos que ainda restam serão suficientes para cobrir 12 páginas. Da página 100 à página 111 – cuidado para não pensar que é a página 112, ok?

Sendo assim, foram numeradas desde a página 1 até a página 111, perfazendo o total de 111 páginas.

Questão 14 (QUESTÃO INÉDITA) Em uma lanchonete, há 5 sabores diferentes de sanduíches, 6 sabores diferentes de sucos e 3 sabores de sobremesas. Um pedido é composto por, no máximo, um sanduíche, um suco ou uma sobremesa, mas não necessariamente. Sendo assim, é possível que o cliente peça somente um suco ou somente um sanduíche, mas ele não pode pedir dois sanduíches no mesmo pedido. Determine quantos pedidos diferentes podem ser feitos nessa lanchonete.

Resolução

Pode parecer uma questão boba, mas é um problema muito importante para a logística. Cada pedido diferente representa uma SKU (*skilled unit*) e, portanto, será monitorado pelo setor de logística de uma empresa.

De qualquer maneira, podemos dizer que há 6 opções diferentes de sanduíches: além dos 5 do cardápio, o cliente tem a opção de não pedir nenhum sanduíche; o mesmo é válido para os sabores diferentes de sucos que são 7, pois o cliente pode não pedir nenhum. Assim:

(5+1)	x	(6+1)	x	(3+1)		=6.7.4 = 168
Sanduíches		**Sucos**		**Sobremesas**		**Total**

Há um total de 168 pedidos diferentes. Convém notar que um desses pedidos é um pedido vazio, pois não contém nenhum sanduíche, nenhum suco e nenhuma sobremesa. Como o problema não fez nenhuma restrição à existência de pedidos vazios, esse pedido deve ser considerado.

1.1. Princípio da Casa dos Pombos

Um momento nerd. Confesso que gosto muito mais do nome original desse princípio: teorema de Dirichlet.

De qualquer modo, o teorema de Dirichlet ou o princípio da casa dos pombos estabelece que: se m objetos devem ser guardados em n gavetas com m > n, então, pelo menos, uma gaveta deverá ter mais de 1 objeto.

Por exemplo, se eu tenho 10 camisas e 8 gavetas, **tudo o que podemos garantir é que, pelo menos, uma gaveta terá mais de uma camisa.**

Essa conclusão é fácil de ser tomada. Se eu colocar uma camisa em cada gaveta, terei um total de 8 camisas. Se eu quiser guardar todas as 10 camisas em gavetas, necessariamente, será preciso acumular mais de uma gaveta em alguma gaveta.

No entanto, tome muito cuidado com essa conclusão. É relativamente fácil criar uma questão que possa confundir a respeito dele.

Atenção!

Não é possível garantir que:

- há duas gavetas com mais de uma camisa;
- todas as gavetas têm, pelo menos, uma camisa;
- existe uma gaveta com duas camisas.

Vejamos um modo curioso de guardar as 10 camisas em 8 gavetas que ilustra claramente que todas essas três assertivas são falsas.

Aplicação do teorema de Dirichlet:

Número de camisas	0	3	1	1	1	1	1	1
Gaveta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

No entanto, podemos ver claramente que existe uma gaveta, no caso a 2, que tem mais de uma camisa.

Esse simples teorema cai de mais e sempre causa confusão entre os alunos.

1.2. Princípio da Inclusão e Exclusão

Antes de adentrarmos no estudo da teoria de probabilidades, precisamos saber algumas noções básicas de conjuntos.

Considere o conjunto de eventos possíveis no lançamento de um dado.

Espaço Amostral de Eventos (Ω): representa todo o conjunto de eventos possíveis.

Exemplo: se estamos falando de um lançamento de um dado de seis faces, teríamos o espaço amostral $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Evento (A): é um evento qualquer para o qual se deseja calcular a probabilidade de ocorrência.

Exemplo: se queremos saber qual a probabilidade de o lançamento ser maior ou igual a 5, temos que A = {5, 6}.

Além disso, há algumas operações importantes. Vamos a elas.

Intersecção ($\cap$)é representado pela palavra E.

Exemplo: considere dois eventos distintos. A é o evento anterior, ou seja, A ={5,6}. Já o evento B é o lançamento resultar em número ímpar, portanto, tem-se B = {1,3,5}.

A intersecção, representada por $A \cap B$, corresponde ao evento de acontecer A e B **simultaneamente.** Para isso, precisamos tomar os elementos comuns entre esses dois conjuntos.

$$A \cap B=\{5\}$$

União ∪: é representado pela palavra OU.

A união, representada por $A \cup B$, corresponde ao evento de acontecer, pelo menos, um dos dois eventos A ou B. Para isso, basta agrupar os elementos de ambos os conjuntos.

$$A \cup B=\{1,3,5,6\}$$

1.2.1. União de Eventos

Trata-se de um assunto amplamente explorado em provas.

Para entender melhor a expressão que vai ser deduzida, vamos representar os eventos A e B por meio de diagramas.

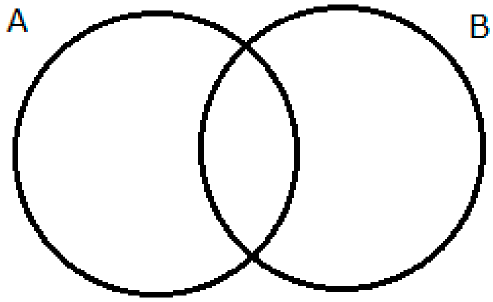
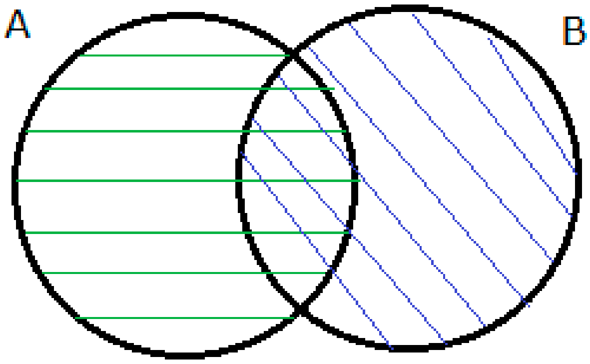


Diagrama da união de dois eventos

Para calcular a probabilidade da união de dois eventos, devemos calcular o número de elementos dessa união.

Podemos começar somando os elementos de A com os elementos de B. Marcaremos os elementos de A com linhas horizontais verdes e os de B com linhas diagonais azuis.



Perceba, no entanto, que os elementos da intersecção foram contados duas vezes. Por isso, precisamos retirá-los, de modo que sejam contados apenas uma vez.

Dessa maneira, o número de elementos da união é:

$$\#(A \cup B)=(\#A) + (\#B) - \# (A \cap B)$$

Podemos generalizar essa expressão para união três eventos. Caso tenha curiosidade, você poderá tentar deduzir, porém, isso dará um pouco de trabalho.

$$\#(A \cup B \cup C)=(\#A)+ (\#B)+ (\#C) - \# (A \cap B) - \# (A \cap C) - \# (B \cap C) + (A \cap B \cap C)$$

Há uma lógica relativamente simples para lembrar essa expressão. Perceba que:

#(A ∪ B ∪ C)= Soma dos elementos um a Um - Intersecções Dois a Dois + Intersecção Três a Três

É só você se lembrar de que o sinal vai alternando. 1 a 1 é positivo, as probabilidades 2 a 2 entram com sinal negativo; 3 a 3 positivo, e assim por diante. Eu nunca vi em provas de concurso, mas se a questão colocar uma união de quatro ou mais eventos, você pode continuar: as intersecções 4 a 4 entram com sinal negativo, as 5 a 5, com sinal positivo e, por aí, vai.

E, agora, vamos treinar?

Direto do concurso

Questão 15 (FGV/2015/PREFEITURA DE CUIABÁ-MT/PROFESSOR DE PEDAGOGIA) Em uma sacola há uma bola branca, duas pretas e quatro vermelhas. Não há outras bolas na sacola além dessas que foram citadas. Retiram-se quatro bolas da urna, aleatoriamente. Sobre as bolas retiradas, é correto afirmar que:

a) Todas são vermelhas.
b) No máximo uma é vermelha.
c) Pelo menos uma é preta.
d) Pelo menos duas são da mesma cor.
e) Pelo menos duas são vermelhas.

Comentário

Letra d.

Perceba que há três gavetas diferentes: bolas brancas, bolas pretas e bolas vermelhas. Se retiramos quatro bolas, pelo teorema de Dirichlet, duas delas devem vir da mesma gaveta, ou seja, devem apresentar a mesma cor.

Podemos, ainda, garantir que uma delas é vermelha, porque existe um limite de três bolas que não são vermelhas. No entanto, não é possível garantir que duas delas sejam vermelhas, pois pode haver a seguinte situação BPPV.

Não podemos garantir que uma é preta, pois podemos ter BVVV.

Mas, note que, em todos os casos, há duas bolas da mesma cor, como já previsto pelo teorema de Dirichlet.

Questão 16 (CESPE/TJ-SE/2014) O rito processual de análise de determinado tipo de processo segue as três seguintes fases:

instrução: após a apresentação da representação e das provas, o juiz decide pela admissibilidade ou não do caso;

julgamento: admitido o caso, o juiz analisa o mérito para decidir pela culpa ou não do representado;

apenação: ao culpado o juiz atribui uma pena, que pode ser ou o pagamento de multa, ou a prestação de serviços à comunidade.

A partir das informações acima, considerando que a probabilidade de que ocorra erro de decisão na primeira fase seja de 10%, na segunda, de 5% e, na terceira, de 3%, e que a ocorrência de erro em uma fase não influencie a ocorrência de erro em outras fases, julgue os próximos itens.

Para cada processo do referido tipo, desconsiderando os possíveis erros de decisão, a quantidade de possíveis decisões durante o rito processual é superior a 5.

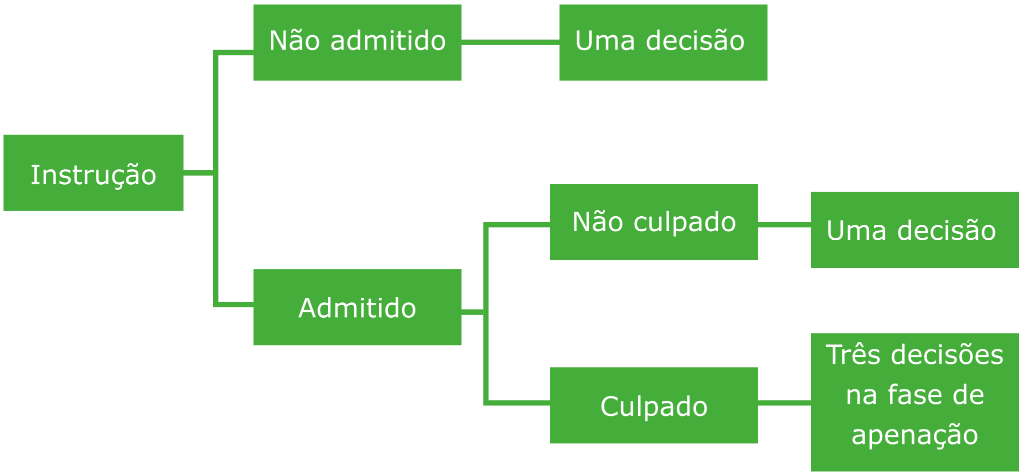
Comentário

Errado.

Questão interessante sobre a aplicação do PFC. Perceba que, na fase de instrução, se o juiz decidir pela não admissibilidade do caso, não há que se falar nas etapas posteriores. Portanto, caso o juiz encerre o processo na fase de instrução, só haverá uma decisão possível, a não admissibilidade do processo.

O mesmo se aplica ao julgamento, se o juiz decidir pela não culpa do representado, não há que se falar em fase de apenação. Da mesma forma, só existe uma decisão possível: a não culpa do representado.

Dessa maneira, há as seguintes possibilidades para as decisões no rito processual.



Caso o representado seja declarado culpado, o juiz poderá tomar 3 decisões diferentes na fase de apenação. Portanto, são apenas cinco decisões possíveis, não um número superior a cinco.

Questão 17 (FCC/SEDU-ES/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Em uma gaveta há 5 pares de meias pretas, 7 pares de meias vermelhas e 10 pares de meias brancas. O número mínimo de pares de meias que precisam ser retirados da gaveta, sem que se veja a cor, para que certamente sejam retirados pelo menos três pares de meias de cores diferentes é

a) 4.

b) 15.

c) 6.

d) 13.

e) 18.

Comentário

Letra e.

É uma questão que requer bastante atenção. Pediu para ter certeza de que três pares de meias tenham cores diferentes. Portanto, o pior caso possível seria quando você retirasse as 10 meias brancas e depois 7 meias pretas. Nesse caso, necessariamente, a décima oitava meia seria vermelha, portanto, haveria três pares de meias com cores diferentes.

Com menos de 18 meias, é sempre possível retirar apenas meias brancas e meias pretas.

Questão 18 (FGV/TJ-PI/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/OFICIAL DE JUSTIÇA) Em um saco A há somente fichas vermelhas e em um saco B há somente fichas amarelas, sendo 7 fichas em cada saco. Retiram-se 3 fichas do saco A, que são então colocadas no saco B. Depois, retiram-se aleatoriamente 3 fichas do saco B, que são então colocadas no saco A. É correto concluir que ao final do procedimento descrito:

a) há no máximo 4 fichas vermelhas no saco A

b) há exatamente 4 fichas vermelhas no saco

c) há exatamente 4 fichas amarelas no saco

d) o número de fichas amarelas no saco A é menor do que o número de fichas vermelhas no saco B

e) o número de fichas vermelhas no saco A é igual ao número de fichas amarelas no saco B

Resolução

Letra e.

O saco A originalmente tinha 7 fichas vermelhas, que vamos representar por 7V.

O saco B tinha originalmente 7 fichas amarelas, que vamos representar por 7A.

Quando foram retiradas 3 fichas do saco A, passou a ter apenas 4V, enquanto o saco passou B passou a ter 7A + 3V.

Na segunda etapa, serão retiradas 3 fichas aleatórias do saco B que podem ser amarelas ou vermelhas. Suponha que sejam x fichas vermelhas retiradas do saco B. Serão retiradas (3-x) fichas amarelas. Sendo assim, pode-se escrever:

A: 4V + xV + (3-x)A = (4+x)V + (3-x)A

B: 3V – xV + 7A – (3-x)A = (3-x)V + (7-3+ x)a = (3-x)V + (4+ x)A

Sendo assim, o número de fichas vermelhas no saco B é igual ao número de fichas amarelas do saco A.

QUESTÃO 19 (FCC/TRT-4ª REGIÃO/RS/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO) Em uma caixa há 30 bolas, numeradas de 1 a 30, todas com numeração diferente. O menor número de bolas que devem ser retiradas ao acaso dessa caixa para se obter, com certeza, duas bolas com numeração ímpar e menor que 19 é igual a

a) 24.

b) 23.

c) 21.

d) 19.

e) 22.

Resolução

Letra b.

As bolas com numeração ímpar e menor que 19 são as que pertencem ao conjunto A = {1, 3, 5…, 17}, compondo um total de 9 elementos.

Perceba que, como o enunciado falou apenas em "menor que 19", não podemos incluir a bola com o número 19 no conjunto A.

Por outro lado, as bolas que não interessam ao problema são as demais 21.

Agora, devemos imaginar o pior caso em que demoramos o máximo possível para tirar as bolas do conjunto A. Nesse caso, tiraríamos as 21 bolas que não pertencem a esse conjunto. Então, as duas bolas seguintes seriam necessariamente do conjunto A.

Portanto, é necessário retirar o mínimo de 23 bolas para garantir que, pelo menos, duas delas pertencem ao conjunto A.

Questão 20 (IBFC/MPE-SP/2011/AUXILIAR DE PROMOTORIA/MOTORISTA) Um livro de ensino médio tem 262 páginas. Os exercícios estão dispostos nas páginas numeradas com múltiplos de 5 e as soluções dos exercícios estão dispostas nas páginas numeradas com múltiplos de 13. O número de folhas que não figuram exercícios ou soluções é de:

a) 64

b) 67

c) 124

d) 190

Resolução

Letra b.

Uma questão bastante interessante sobre o princípio da inclusão e exclusão.

Perceba que o enunciado pediu "o número de folhas". Uma folha é diferente de uma página. Cada folha tem duas páginas. A primeira folha de um livro contém as páginas 1 e 2. Portanto, um livro de 262 páginas tem 131 folhas. Portanto, o conjunto universo será formado por 131 folhas.

Agora, precisamos determinar quantas dessas folhas possuem exercícios ou soluções.

Seja E o conjunto das folhas que possuem exercícios. Sabemos que E contém as páginas múltiplas de 13.

As páginas de E são E = {13, 26, 39, ...}. O número de elementos desse conjunto deve ser obtido pela divisão entre 262 e 13.

$$\begin{array}{r|l} 262 & 13 \\ \hline -260 & 20 \\ =2 & \end{array}$$

Portanto, existem 20 páginas no livro com exercícios. É importante notar que essas páginas necessariamente estão em folhas diferentes, porque não existem múltiplos de 13 consecutivos. Portanto:

$\#E=20$

Agora, seja S o conjunto das folhas que possuem as soluções desses exercícios. As páginas correspondentes a S são: S = {5, 10, 15...}. O número de páginas desse conjunto é obtido pela divisão:

$$\begin{array}{r|l} 262 & 5 \\ \hline -260 & 52 \\ =2 & \end{array}$$

Todas essas páginas pertencem a folhas diferentes, porque não existem múltiplos de 5 consecutivos. Portanto:

#S=52

Finalmente, precisamos determinar a intersecção, ou seja, as folhas que contém exercícios e soluções simultaneamente. Há duas possibilidades que precisamos considerar.

A primeira delas acontece quando os exercícios e as soluções estão na mesma página. Isso só acontece nas páginas que são múltiplas do MMC entre 5 e 13 que é 65. Portanto, são as páginas {65, 130, 195, 260}. Nesse caso, é relativamente fácil contar, mas sempre poderíamos apelar para a divisão.

Porém, também precisamos considerar o caso em que os exercícios e as soluções estão na mesma folha, porém, em páginas diferentes. Uma folha contém as páginas 1 e 2, 3 e 4, 5 e 6, 7 e 8, 9 e 10 e, assim, por diante. Por exemplo, as páginas 25 e 26 estão na mesma folha, a página 25 contém exercícios e a 26 contém as soluções.

Em linguagem mais matemática, queremos saber quais múltiplos de 13 terminam em 6 ou em 9. Contemos:

E = {13, **26, 39**, 52, 65, 78, 91, 104, 117, 130...}

Agora, não precisamos mais contar um a um. Como já chegamos em um múltiplo de 10, sabemos que 26 + 130 = 156 e 39 + 130 = 169 também são páginas que estamos procurando.

Além disso, 156 + 130 = 286 já está fora do livro. Portanto, as folhas que contém exercícios e soluções são:

$$E \cap S=\{25 - 26.39 - 40, 65, 130,155 - 156, 169 - 170, 195,260\}$$

$$\therefore \#E \cap S=8$$

Dessa maneira, o total de folhas que contém soluções ou exercícios corresponde à união:

$$\#E \cup S=\#E + \#S - \#(E \cap S)=20 + 52 - 8 = 64$$

Como o problema pediu as folhas que **não** figuram exercícios ou soluções, na verdade, pediu o número de elementos do complementar da união.

$$\#(E \cup S)^{C} = 131 - 64 = 67$$

QUESTÃO 21 (FCC/TJ-PE/2012) A palavra GOTEIRA é formada por sete letras diferentes. Uma sequência dessas letras, em outra ordem, é TEIGORA. Podem ser escritas 5040 sequências diferentes com essas sete letras. São 24 as sequências que terminam com as letras GRT, nessa ordem, e começam com as quatro vogais. Dentre essas 24, a sequência AEIOGRT é a primeira delas, se forem listadas alfabeticamente. A sequência IOAEGRT ocuparia, nessa listagem alfabética, a posição de número:

a) 11

b) 13

c) 17

d) 22

e) 23

Resolução

Letra c.

Em um primeiro momento, devemos descobrir quantas sequências de letras desejadas vêm antes do alfabeto de IOAEGRT.

Vamos separar em dois casos. O primeiro caso contém as palavras que começam em A ou E. Nesse caso, necessariamente vêm antes de IOAEGRT.

Para a primeira posição, há duas possibilidades (A ou E). Para a segunda posição, restam 3 possibilidades, pois precisamos excluir as letras GRT e a letra que já foi escolhida para a primeira posição.

2	x	3	x	2	X	1	=2.3.2 = 12
1		**2**		**3**		**4**	**Total**

Além disso, a letra pode iniciar em I. Nesse caso, a segunda letra não pode ser O, pois a menor sequência já seria IOAEGRT. Sendo assim, a segunda letra deve ser necessariamente A ou E.

1	x	2	x	2	X	1	=1.2.2.2 = 4
1		**2**		**3**		**4**	**Total**

Sendo assim, existe um total de 12 + 4 = 16 combinações que vêm antes de IOAEGRT no alfabeto. Portanto, IOAEGRT ocupa a posição de número 17.

2. Permutações

O problema das permutações consiste em encontrar o número de anagramas de uma palavra.

Um anagrama é uma palavra que pode ser obtida a partir de outra por meio de trocas nas posições das letras.

Por exemplo, quantos anagramas possui a palavra AMOR? São exemplos: RAOM, MRAO, AMRO.

Como a palavra AMOR tem 4 letras, há, na verdade, quatro posições. Na primeira posição, podemos colocar qualquer uma das quatro letras.

4	**.**		**.**		**.**		
							Total

Na segunda posição, podemos colocar qualquer uma das letras que não foram usadas, portanto, há 3 opções.

4	**.**	**3**	**.**		**.**		
							Total

Na terceira posição, podemos colocar qualquer uma das letras que não foram usadas nas duas posições anteriores. Sobraram, portanto, 2 opções. Para a quarta opção, só restou a última letra que ainda não foi usada. Portanto, o número de anagramas é:

4	**.**	**3**	**.**	**2**	**.**	**1**	**= 4.3.2.1 = 24**
							Total

Há, portanto, 24 anagramas. Perceba, ainda, que simplesmente usamos o princípio fundamental da contagem para esse cálculo.

Agora que você aprendeu a mecânica de como funciona o cálculo de permutações, vamos nos aprofundar nesse assunto.

2.1. Números Fatoriais

Os fatoriais são representados pela exclamação “!”. Para os números inteiros, define-se:

0! = 1

n!=n.(n-1)

Assim, podemos calcular todos os fatoriais. Vejamos alguns exemplos:

0! = 1

1!=1.0!=1

2!=2.1!=2.1=2

3!=3.2!=3.2.1=6

4!=4.3!=4.3.2.1=24

Há duas observações interessantes sobre os números fatoriais:

- n! representa o produto de todos os números naturais de 1 a n;
- n! contém todos os fatoriais de números anteriores. Por exemplo, em 5!, podemos enxergar:

5!= 5.4.3.2.1 - 5.4! - 5.4.3! - 5.4.3.2!

Dessa maneira, um fatorial de um número maior sempre é divisível pelo fatorial de um número menor. Isso é importante para definirmos as permutações com repetição, os arranjos e as combinações.

2.2. Permutações sem Repetição

Quando há uma fila de n elementos todos diferentes, o número de permutações é dado por:

$$P_n = n!$$

É bem fácil de entender essa fórmula. Assim como fizemos para a palavra AMOR, podemos fazer uma generalização para uma sequência qualquer de n elementos.

Para a primeira posição, podemos escolher qualquer uma dos n elementos.

n	**.**		**.**	**...**	**.**		
							Total

Para a segunda posição, não podemos escolher o que já foi escolhido na primeira. Restam, portanto, n-1 elementos. Para a posição seguinte, restarão (n-2) e, assim, por diante, até que, na última posição, só teremos uma escolha.

n	**.**	**n-1**	**.**	**...**	**.**	**1**	**n! = n(n-1)...2.1**
							Total

Agora, já estamos avançando na matéria e dispondo de mais recursos para resolver as questões. Vamos continuar com o assunto?

2.3. Permutações com Repetição

Quantos anagramas tem a palavra AMADA?

Essa palavra tem cinco letras. Portanto, aplicando o raciocínio anterior:

5	**.**	**4**	**.**	**...**	**.**	**1**	**= 5.4.3.2.1 = 120**
							Total

No entanto, prestemos atenção a alguns dos possíveis anagramas. Vamos identificar as três letras A da palavra como A_1, A_2 e A_3, no entanto, é importante destacar que essas letras são iguais.

$A_1MA_2DA_3$

$A_3MA_2DA_1$

$A_1MA_3DA_2$

Observe que esses anagramas, na verdade são iguais. Portanto, não deveriam ser contados. Por isso, precisamos **descontar as permutações** entre as letras repetidas.

Como são 3 letras A, precisamos dividir por 3!, a conta é uma divisão, porque estamos aplicando o princípio fundamental da contagem.

Portanto, o número de anagramas da palavra AMADA será:

$$P_5^3 = \frac{5!}{3!} = \frac{5.4.3!}{3!} = 5.4. = 20$$

Podemos generalizar esse raciocínio da seguinte maneira.

O número de permutações n elementos com k repetições é dado por:

$$P_n^k = \frac{n!}{k!}$$

Outro exemplo interessante é a palavra MATEMATICA. Essa palavra possui 10 letras, mas tem 2 M repetidos, 2 T repetidos e 3 A repetidos.

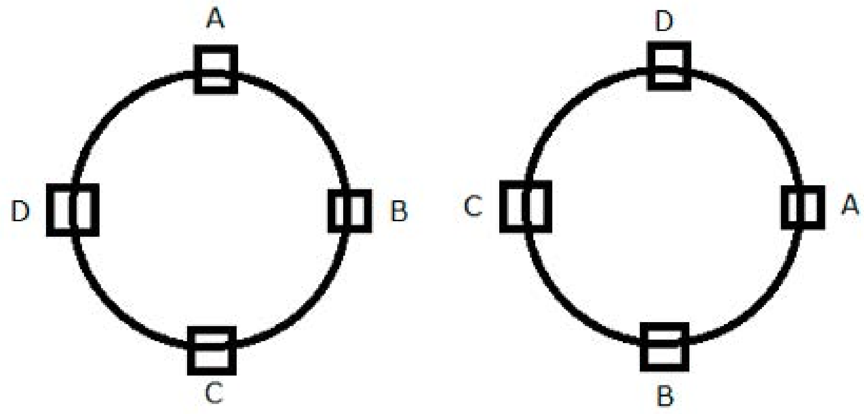
Sendo assim, o número de anagramas dessa palavra será:

$$P_{10}^{2,2,3} = \frac{10!}{2!\,2!\,3!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3!}{2.1.2.1.3!} = 151200$$

2.4. Permutações Circulares

Nas permutações circulares, não existe o primeiro e o último termo. Pense, por exemplo, em uma mesa redonda.

Vejamos um exemplo com quatro elementos.



Perceba que as duas imagens representam a mesma permutação, porque podem ser obtidas uma da outra por meio de uma rotação. Experimente rotacionar a imagem da esquerda 90º no sentido horário e você chegará à imagem da direita.

Sendo assim, quando se consideram as permutações circulares, é necessário considerar que algumas permutações são perdidas.

Podemos ver que existem 4 rotações. Basta que você continue rotacionando em 90º no sentido horário, a quarta rotação será igual à imagem original.

Sendo assim, devemos dividir por 4 as permutações. Nesse caso:

$$PC_4 = \frac{4!}{4} = 3! = 6$$

Podemos generalizar essa expressão. O número de permutações circulares sem repetição de n elementos é:

$$PC = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Caso haja repetições, basta aplicar o princípio visto na seção anterior.

Direto do concurso

Questão 22 (CESPE/TRE-MT/2015) Em um campeonato de futebol amador de pontos corridos, do qual participam 10 times, cada um desses times joga duas vezes com cada adversário, o que totaliza exatas 18 partidas para cada. Considerando-se que o time vencedor do campeonato venceu 13 partidas e empatou 5, é correto afirmar que a quantidade de maneiras possíveis para que esses resultados ocorram dentro do campeonato é.

a) superior a 4.000 e inferior a 6.000.

b) superior a 6.000 e inferior a 8.000.

c) superior a 8.000.

d) inferior a 2.000.

e) superior a 2.000 e inferior a 4.000.

Resolução

Letra c.

Queremos que a equipe em questão tenha vencido 13 partidas e empatado 5 vezes nas suas 18 partidas. Sendo V uma vitória e E um empate, queremos o número de anagramas da seguinte palavra.

VVVVVVVVVVVVVEEEEE

Trata-se de um problema clássico de permutação com repetição.

$$N = \frac{18!}{13!\,5!} = \frac{18.17.16.15.14}{5.4.3.2.1} = \frac{18.17.2.1.14}{1.1.1.1.1} = 8568 > 8000$$

QUESTÃO 23 (FGV/CODESP-SP/2010/ADVOGADO) Há seis contêineres diferentes que deverão ser empilhados, três mais pesados embaixo e três mais leves em cima. O número de maneiras de se fazer essa arrumação, mantendo os três mais pesados embaixo e os três mais leves em cima é:

a) 18

b) 6

c) 9

d) 36

e) 72

Resolução

Letra d.

Há três posições tanto em cima quanto embaixo. Porém, não podemos misturar os contêineres de cima com os debaixo, porque os mais pesados devem ficar embaixo e os mais leves em cima.

Sendo assim, para os contêineres, do andar de cima, há 3 contêineres que devem ser organizados em 3 posições. Isso equivale ao conceito de permutação.

O mesmo se aplica aos contêineres debaixo.

				Total
Superior	3	2	1	=3.2.1=6
Inferior	3	2	1	=3.2.1=6

Agora, devemos utilizar o princípio fundamental da contagem.

6	**.**	**6**	**= 6.6 = 36**
Superior		**Inferior**	**Total**

QUESTÃO 24 (FGV/PC-MA/2012/AUXILIAR DE PERÍCIA MÉDICO-LEGAL) Considere as 24 permutações das letras P, C, E e M. Se colocarmos essas 24 permutações em ordem alfabética, a permutação PCEM ocupará a posição de ordem:

a) 24

b) 21

c) 19

d) 18

e) 17

Resolução

Letra c.

Queremos descobrir quais anagramas da palavra PCEM aparecem antes no alfabeto da própria palavra PCEM.

Vamos separar os anagramas em dois grupos.

- os que começam com a letra P;
- os que começam com outra letra (C, E ou M).

Perceba que, se o anagrama começar, com C, E ou M, virá antes de PCEM, necessariamente. Portanto, já contemos os anagramas que começam com essas letras.

Para a primeira posição, há 3 opções (CEM). Para a segunda posição, há 3 opções, pois não podemos escolher a letra que já foi escolhida no passo anterior. Para a terceira posição, há 2 opções, pois não podemos escolher nenhuma das 2 letras que já foram escolhidas antes. Por fim, para a quarta posição, só sobrou uma letra.

3	**.**	**3**	**.**	**2**	**.**	**1**	**= 3.3.2.1 = 18**
							Total

Agora, quanto aos anagramas que começam com a letra P, perceba que o primeiro deles é exatamente PCEM, pois as letras CEM estão em ordem alfabética.

Sendo assim, só existem 18 anagramas da palavra PCEM que vem antes dela no alfabeto. Portanto, ocupa 19ª posição entre os anagramas. Muito cuidado para não cair na pegadinha da letra "d" (18).

Questão 25 (FGV/AL-BA/2014/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR/ECONOMIA) A sigla de Assembleia Legislativa do Estado da Bahia é "ALBA". Embaralhando as letras de ALBA, o número de sequências diferentes que podem ser formadas com essas mesmas 4 letras é:

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

e) 12

Resolução

Letra e.

A palavra ALBA tem 4 letras, sendo duas repetidas, portanto, o número de anagramas é:

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{4.3.2!}{2!} = 4.3 = 12$$

QUESTÃO 26 (CESPE/BANCO DO BRASIL/2008/ESCRITURÁRIO) A quantidade de permutações distintas que podem ser formadas com as 7 letras da palavra REPETIR, que começam e terminam com R, é igual a 60.

Resolução

Certo.

Nesse caso, a primeira e a última letra estão travadas, ou seja, devem ser a letra R. Quanto às demais posições, devemos embaralhar as demais 5 letras, das quais 2 estão repetidas. Trata-se, portanto, de uma permutação com repetição

1	**.**	P_5^2	**.**	**1**	**.**	
R		**EPETI**		**R**		**Total**

$$N = P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 5.4.3 = 60$$

QUESTÃO 27 (FGV/MRE/2016/OFICIAL DE CHANCELARIA) André, Beatriz e Carlos são adultos, Laura e Júlio são crianças e todos vão viajar em um automóvel com 5 lugares, sendo 2 na frente e 3 atrás. Dos adultos, somente Carlos não sabe dirigir. As crianças viajarão atrás, mas Júlio faz questão de ficar em uma janela. O número de maneiras diferentes pelas quais essas pessoas podem ocupar os cinco lugares do automóvel é:

a) 12

b) 16

c) 18

d) 20

e) 24

Resolução

Letra b.

Uma questão bem inteligente. Creio que a melhor maneira de fazer é em dois passos:

- calculamos de quantas maneiras é possível organizar os ocupantes dos bancos da frente;
- calculamos de quantas maneiras é possível organizar os ocupantes dos bancos de trás.

Para os bancos da frente, a cadeira do motorista só pode ser ocupada por 2 pessoas (Beatriz e André). Já a cadeira do carona pode ser ocupada por outras 2 pessoas (Carlos e a pessoas que não foi escolhida para motorista).

Portanto, para os bancos da frente, há:

2	**.**	**2**		**= 2.2 = 4**
Motorista		**Copiloto**		**Bancos da Frente**

No banco de trás, vamos escolher primeiro a posição de Júlio. Ele só pode ficar em uma das janelas, portanto, só há duas opções para alocá-lo.

Os demais 2 passageiros (Laura e o adulto que sobrou) podem ocupar qualquer posição, portanto, trata-se de uma permutação de dois elementos. Podemos escrever assim:

2	**.**	**2**		**1**	**= 2.2 = 4**
Júlio		**Laura**		**Adulto**	**Bancos de Trás**

Perceba que calculamos de formas diferentes o número de maneiras de ocupar os bancos da frente e os bancos de trás, porque escolhemos o modo mais fácil em ambos os casos.

Por fim, para calcular o número de formas de organizar todos os passageiros, basta aplicar o princípio fundamental da contagem.

4	**.**	**4**		**= 4.4 = 16**

$$\frac{x}{60} = \frac{0{,}2}{1} \therefore x = \frac{0{,}2.60}{1} = 12\ min$$

Questão 28 (ESAF/AFRB/2012) Na prateleira de uma estante, encontram-se 3 obras de 2 volumes e 2 obras de 2 volumes, dispondo-se, portanto, de um total de 10 volumes. Assim, o número de diferentes maneiras que os volumes podem ser organizados na prateleira, de modo que os volumes de uma mesma obra nunca fiquem separados, é igual a:

a) 3.260

b) 3.840

c) 2.896

d) 1.986

e) 1.842

Resolução

Letra b.

Eu não entendi muito bem por que a questão separou 3 obras de 2 volumes e 2 obras de 2 volumes. Não era mais fácil ter dito logo que eram 5 obras de 2 volumes cada?

De qualquer maneira, perceba que podemos permutar livremente as 5 obras.

5	**.**	**4**	**...**	**1**		**= 5! = 120**
Obra 1		**Obra 2**	**...**	**Obra 5**		**Total**

Além disso, também podemos permutar os dois volumes dentro de cada obra. Lembre-se de que não podemos misturar volumes de obras diferentes. Sendo assim, há algumas possibilidades a mais.

5!	**.**	**2!**	**...**	**2!**		**= 5!(2!)^5 = 120.32**
Permutações das obras		**Volumes da obra 1**	**...**	**Volumes da obra 5**		**Total**

Portanto, o número de maneiras de organizar a estante é:

$$N = 5!\,(2)^5 = 120.32 = 3840$$

Questão 29 (CESPE/ANAC/2009/ESPECIALISTA EM REGULAÇÃO/ECONOMIA) Considere que, em uma empresa, seja utilizado sistema de códigos com apenas dois tipos de símbolos (1 e 2), sendo cada código formado por uma sequência desses símbolos, cuja ordem é igual à soma dos algarismos que formam o código, a exemplo dos códigos distintos 1, 11, 12 e 121, que são de ordem 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Considere, ainda, que s(0) = 1 e que s(n) é igual ao número de códigos distintos de ordem n, n>1,

Existem, no máximo, 55 códigos distintos de ordem menor ou igual a 10.

Resolução

Errado.

Os códigos de ordem 10 são formados por uma certa quantidade x de dígitos 1 e uma quantidade y de dígitos 2.

$$x + 2y = 10$$

Como 10 e 2y são pares, note que x também deverá ser par.

Sendo assim, comecemos com x = 0. Nesse caso, y = 5 e o código será 22222. Só existe uma possibilidade.

Quando x = 2, teremos y = 4. Nesse caso, há o número 112222 e suas permutações, que podem ser calculadas por:

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6.5.4!}{4!\,.2.1} = 15$$

Quando x = 4, y = 3. Nesse caso, há o número 1111222 e suas permutações, que podem ser calculadas por:

$$P_7^{4,3} = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{7.6.5.4!}{4!\,3.2.1} = 35$$

Quando x = 6, y = 2. Nesse caso, há o número 11111122 e suas permutações, que podem ser calculadas por:

$$P_8^{6,2} = \frac{8!}{6!\,2!} = \frac{8.7.6!}{6!\,.2.1} = 28$$

Quando x = 8, s y = 1. Nesse caso, há o número 111111112 e suas permutações, que podem ser calculadas por:

$$P_9^{8,1} = \frac{9!}{8!\,1!} = \frac{9.8!}{8!\,1} = 9$$

Quando x = 10, y = 0. Nesse caso, há o número 11111111. Nesse caso, só existe uma probabilidade.

Basta somar as possibilidades encontradas:

$$N_{10} = 1 + 15 + 35 + 28 + 9 + 1 = 89 > 55$$

Somente com o código de ordem 10 já superamos os 55 propostos pelo enunciado.

Questão 30 (ESAF/AFRFB/2009) De quantas maneiras podem sentar-se três homens e três mulheres em uma mesa redonda, isto é, sem cabeceira, de modo a se ter sempre um homem entre duas mulheres e uma mulher entre dois homens?

a) 72

b) 36

c) 216

d) 820

e) 360

Resolução

Anulada.

Se a mesa não fosse redonda, haveria duas possibilidades de cobrir a mesa, em que M e H representam, respectivamente, mulher e homem.

M		H		M		H		M		H		**Total**
H		M		H		M		H		M		**Total**

No primeiro caso, para a primeira mulher, há 3 opções, pois pode ser qualquer uma. Para o primeiro homem, também há 3 opções, pois pode ser qualquer um. Para a segunda mulher, há 2 opções, porque a que já foi escolhida anteriormente não pode ser repetida. O mesmo é válido para o segundo homem. Portanto:

3	.	3	.	2	.	2	.	1	.	1		=36
M		H		M		H		M		H		**Total**
3	.	3	.	2	.	2	.	1	.	1		=36
H		M		H		M		H		M		**Total**

Há, portanto, 72 possibilidades de organização dos homens e mulheres numa mesa que não fosse redonda.

Como a mesa é redonda e tem 6 lugares, devemos descontar as 6 rotações.

$$N = \frac{72}{6} = 12$$

Por conta disso, a questão, infelizmente, está nula.

QUESTÃO 31 (ITA/2015) Dispomos de seis cores diferentes. Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras isto pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica à outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo?

a) 40

b) 36

c) 35

d) 32

e) 30

Resolução

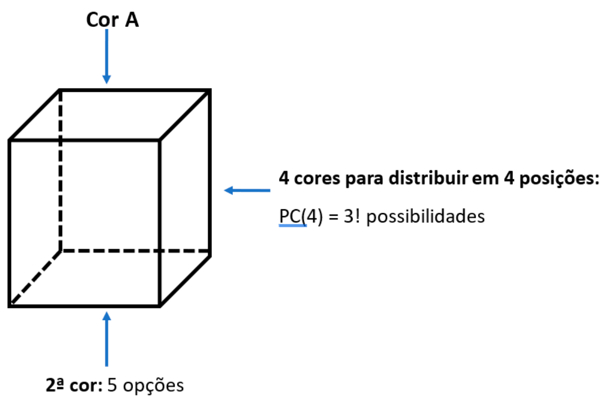
Letra e.

Como todas as seis faces do cubo são iguais, suponha que escolhemos uma face qualquer para a cor 1. Colocamos essa face para cima apenas para facilitar a visualização.

Para a face inferior, haverá, portanto, 5 opções de cores, pois não podemos repetir a cor 1.

Para as faces laterais, há 4 opções de cores e 4 faces. Trata-se, portanto, de uma permutação circular. São, portanto, 3! = 6 opções.

Sendo assim, o total de possibilidades é 5.6 = 30 possibilidades.



3. Arranjos e Combinações

Esse é um dos assuntos mais explorados pelas provas justamente pela confusão que os(as) alunos(as) costumam fazer entre arranjos e combinações.

Arranjos e combinações consistem em escolher k elementos num total de n.

A diferença crucial entre eles é saber se a ordem importa ou não.

Nesse curso, não consideraremos os casos em que ocorre repetição, porque arranjos e combinações com repetição elevam bastante o grau de dificuldade das questões e tal assunto jamais apareceu em provas de concursos públicos, mas, caso você tenha curiosidade, basta me perguntar por e-mail, ok?

3.1. Arranjos

Um arranjo consiste em escolher k elementos num total de n, **importando a ordem.**

Suponha, por exemplo, que você tem uma equipe de 10 pessoas e você precisa escolher 2 delas para ser o presidente e o vice-presidente de uma comissão.

De quantas formas você poderá formar a tal comissão?

Para o presidente, há 10 opções, pois qualquer um dos membros da equipe pode sê-lo. Já para o vice, há apenas 9 opções, pois o membro que já foi escolhido como presidente não pode ser escolhido.

Usando o princípio fundamental da contagem:

10	**.**	**9**	**= 10.9 = 90**
Presidente		**Vice**	**Total**

Agora, a pergunta mais relevante que você precisa fazer para questões de prova. Por que a ordem importa nesse caso?

Pare e pense na resposta dessa pergunta. Somente depois, prossiga a leitura desse material.

Ora, vejamos duas escolhas em que só mudou a ordem.

A	**B**
Presidente	**Vice**
B	**A**
Presidente	**Vice**

Perceba que existe uma grande diferente. No primeiro caso, A era o presidente e B era o vice. No segundo caso, mudou a ordem e mudaram também as funções.

Por isso, as possibilidades são diferentes e devem ser consideradas.

Sempre que uma questão falar de uma comissão em que as pessoas têm **funções diferentes,** a ordem importa, portanto, você deverá utilizar um **arranjo.**

Caso a questão fale de uma comissão genérica em que todas as pessoas **têm funções iguais,** a ordem não importa, portanto você deverá utilizar uma **combinação.**

São comuns também as questões em que parte dos membros são genéricos e parte têm funções especiais. Nesse caso, minha recomendação é que você use o PFC começando pelos membros que possuem funções especiais, ou seja, pelo arranjo.

Agora, vamos apresentar a fórmula geral do arranjo que pode ser obtida pelo princípio fundamental da contagem.

Precisamos escolher k elementos num total de n. Isso também pode ser dito da seguinte forma "um arranjo de n elementos k a k".

Para o primeiro a ser escolhido, há n possibilidades, qualquer elemento pode ser escolhido. Para o segundo a ser escolhido, há n – 1 opções, pois não podemos repetir o primeiro elemento já escolhido.

Para o terceiro, há n – 2, porque não podemos escolher nenhum dos 2 que já foram escolhidos. E, assim, por diante até que, para o k-ésimo elementos escolhido, haverá n – k +1 opções.

Agora, aplicando o PFC:

n	**.**	**n-1**	**.**	**...**	**.**	**n-k+1**		$= A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

1º		2º				Kº		Total

Dessa maneira, o arranjo de n elementos k a k é dado por:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$$

3.2. Combinações

Uma combinação consiste em escolher k elementos num total de n, **sem importar a ordem.**

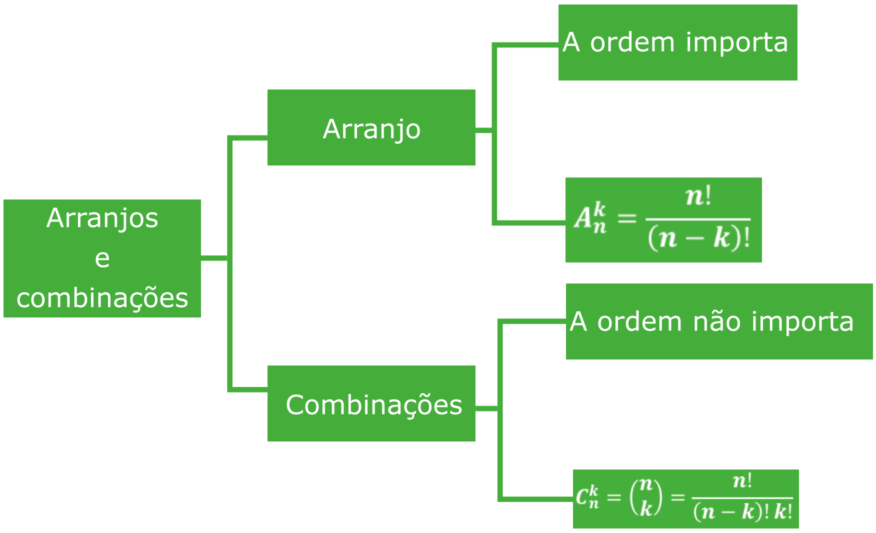
Nesse caso, podemos partir da fórmula já deduzida para o arranjo, mas precisamos descontar as permutações dos k elementos escolhidos.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Essa expressão é extremamente importante. É chamada de "combinação de n elementos k a k" ou ainda de "binomial de n k a k". O termo binomial é muito conhecido num assunto chamado binômio de Newton.

Vale a pena conhecer a notação para o número binomial, que é apresentada a seguir.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$



Direto do concurso

(CESPE/TRF-1ª REGIÃO/2017) Em uma reunião de colegiado, após a aprovação de uma matéria polêmica pelo placar de 6 votos a favor e 5 contra, um dos 11 presentes fez a seguinte afirmação: "Basta um de nós mudar de ideia e a decisão será totalmente modificada."

Considerando a situação apresentada e a proposição correspondente à afirmação feita, julgue o próximo item.

Questão 32 A quantidade de maneiras distintas de se formar o placar de 6 votos a favor e 5 contra, na decisão do assunto polêmico pelos presentes no referido colegiado, é inferior a 500.

Resolução

Certo.

Nesse caso, precisamos escolher 6 presentes para terem uma opinião a favor e 5 presentes para terem uma opinião contrária.

Entre os favoráveis, precisamos escolher 6 presentes no total de 11.

$\binom{11}{6}$	.		
A favor		**Contra**	**Total**

Como já escolhemos 6 presentes, sobraram apenas 5. Todos eles precisam ser contrários.

$\binom{11}{6}$	.	$\binom{5}{5}$	
A favor		**Contra**	**Total**

Basta calcular o produto encontrado.

$$\binom{11}{6} = \frac{11!}{6!\,5!} = \frac{11.10.9.8.7}{5.4.3.2.1} = 462$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

462	**.**	**1**	**462**
A favor		**Contra**	**Total**

De fato, 462 < 500.

QUESTÃO 33 (CESPE/ANVISA/2016/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Situação hipotética: A ANVISA, com objetivo de realizar a regulação de um novo medicamento, efetua as análises laboratoriais necessárias. Essas análises são assistidas por um grupo de 4 dos seus 8 técnicos farmacêuticos. Desses técnicos, 3 possuem cargo de chefia de equipe e por isso não trabalham juntos. Assertiva: Nessa situação, considerando que em cada uma das equipes participa sempre apenas um dos três técnicos farmacêuticos chefes, então a quantidade de equipes distintas com 4 técnicos farmacêuticos que poderão ser formadas é inferior a 25.

Resolução

Errado.

Na equipe, há 5 técnicos comuns e 3 chefes. Precisamos escolher 1 chefe e 3 comuns para a equipe de 4 técnicos. Então:

$\binom{3}{1}$	.	$\binom{5}{3}$	
Chefe		**Comuns**	**Total**

Agora, basta calcular os binomiais.

$$\binom{3}{1} = 3$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5.4}{2.1} = 10$$

Agora, basta calcular:

3	.	10		**=3.10 = 30 > 25**
Chefe		**Comuns**		**Total**

Perceba que sempre utilizamos o PFC.

Questão 34 (CESPE/MPOG/2015/ANALISTA EM TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO) Determinado órgão público é composto por uma diretoria-geral e quatro secretarias; cada secretaria é formada por três diretorias; cada diretoria tem quatro coordenações; cada coordenação é constituída por cinco divisões, com um chefe e sete funcionários subalternos em cada divisão.

A respeito desse órgão público, julgue o item seguinte, sabendo que cada executivo e cada funcionário subalterno só pode ocupar um cargo nesse órgão.

Se, entre onze servidores previamente selecionados, forem escolhidos: sete para compor determinada divisão, um para chefiar essa divisão, um para a chefia da coordenação correspondente, um para a diretoria e um para a secretaria, haverá menos de 8.000 maneiras distintas de se fazer essas escolhas.

Resolução

Certo.

Vamos fazer o problema por partes. Primeiramente, escolheremos os quatro chefes de funções específicas.

Para isso, precisamos escolher 4 em 11, importando a ordem, porque cada um tem uma função diferente. Trata-se, portanto, de um arranjo.

11	.	10	.	9	.	8	=11.10.9.8
Chefe da Divisão		Chefe da Coordenação		Diretoria		Secretaria	Total

$$A_{11}^{4} = \frac{11!}{7!} = 11.10.9.8 = 7920$$

Como já escolhemos os quatro chefes, sobraram 7 funcionários. Todos devem compor a divisão. Portanto, o número de formas é mesmo 7920, que é inferior a 8000.

Questão 35 (CESPE/FUB/2015) Com as cinquenta e duas cartas de um baralho, é possível formar mais de 2.500.000 jogos distintos de 5 cartas.

Resolução

Certo.

Formar um jogo de 5 cartas é a mesma coisa de escolher 5 cartas dentre as 52 do baralho. Nesse caso, a ordem não importa. Por isso, utilizaremos uma combinação.

$$C_{52}^{5} = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,47!} = \frac{52.51.50.49.48}{5.4.3.2.1} = 2598960 > 2500000$$

QUESTÃO 36 (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/2014/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL) Um batalhão é composto por 20 policiais: 12 do sexo masculino e 8 do sexo feminino. A região atendida pelo batalhão é composta por 10 quadras e, em cada dia da semana, uma dupla de policiais policia cada uma das quadras.

Com referência a essa situação, julgue o item subsequente.

Se a escala dos policiais for feita de modo a diversificar as duplas que policiam as quadras, então, se determinada dupla policiar a quadra X em determinado dia, essa mesma dupla voltará a policiar a quadra X somente mais de seis meses após aquele dia.

Resolução

Certo.

Para isso, precisamos saber o número de duplas que podem ser formadas. Como não há nenhuma restrição a respeito do sexo dos policiais nas duplas, vamos considerar que precisamos escolher 2 policiais dentre os 20 no total.

$$C_{20,2} = \binom{20}{2} = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{20.19}{2.1} = 190$$

Dessa maneira, se uma dupla for formada hoje, só precisará se repetir daqui a 190 dias, ou seja, mais de 6 meses.

QUESTÃO 37 (CESPE/TC-DF/2014/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA) Considerando que, em um planejamento de ações de auditoria, a direção de um órgão de controle tenha mapeado a existência de 30 programas de governo passíveis de análise, e sabendo que esse órgão dispõe de 15 servidores para a montagem das equipes de análise e que cada equipe deverá ser composta por um coordenador, um relator e um técnico, julgue os próximos itens.

A quantidade de maneiras distintas de serem escolhidos 3 dos referidos servidores para a montagem de uma equipe de análise é superior a 2.500.

Resolução

Certo.

Como os três servidores possuem funções diferentes, a ordem de escolha importa. Portanto, devemos fazer um arranjo de 3 servidores em um total de 15.

$$A_{15}^{3} = \frac{15!}{12!} = 15.14.13 = 2730 > 2500$$

QUESTÃO 38 (CESPE/TC-DF/2014/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA) Considerando que, em um planejamento de ações de auditoria, a direção de um órgão de controle tenha mapeado a existência de 30 programas de governo passíveis de análise, e sabendo que esse órgão dispõe de 15 servidores para a montagem das equipes de análise e que cada equipe deverá ser composta por um coordenador, um relator e um técnico, julgue os próximos itens.

A quantidade de maneiras distintas de se escolherem 3 desses programas para serem acompanhados pelo órgão é inferior a 4.000.

Resolução

Errado.

Quando escolhemos 3 programas para serem analisados, a ordem não importa. Portanto, devemos fazer uma combinação de 30 programas 3 a 3.

$$C_{30}^{3} = \binom{30}{3} = \frac{30.29.28}{3.2.1} = 4060 > 4000$$

Questão 39 (CESPE/SAEB-BA/2011) O número total de partidas em um campeonato de pingue-pongue com 20 participantes em que cada competidor jogue uma única vez com cada um dos demais é igual a:

a) 400

b) 380

c) 200

d) 190

Resolução

Letra d.

Uma partida é formada por dois competidores, sem importar a ordem. Em outras palavras, a partida A x B é igual à partida B x A.

Por isso, devemos usar o conceito de combinação.

$$C_{20}^{2} = \binom{20}{2} = \frac{20!}{18!\,2!} = \frac{20.19}{2.1} = 190$$

Questão 40 (CESPE/TJ-SE/2014/TÉCNICO JUDICIÁRIO) Um grupo de 15 turistas que planeja passear pelo rio São Francisco, no Canyon do Xingó, em Sergipe, utilizará, para o passeio, três barcos: um amarelo, um vermelho e um azul. Cada barco tem capacidade máxima para 8 ocupantes e nenhum deles deixará o porto com menos de 3 ocupantes.

Com base nessa situação hipotética, julgue os itens seguintes.

A quantidade de maneiras distintas de escolher 8 turistas para ocupar o barco azul e 7 para ocupar o barco amarelo é inferior a $8^2 \times 7^2$.

Resolução

Errado.

Precisamos escolher 8 turistas dentre os 15 para ocupar o barco azul. Devemos usar uma combinação, porque não importa a ordem em que eles entram no barco. Os demais 7 estarão automaticamente escolhidos para o barco amarelo.

$$C_{15,8} = \binom{15}{8} = \frac{15!}{8!\,7!} = \frac{15.14.13.12.11.10.9}{7.6.5.4.3.2.1} = 6435 > 3136$$

O número fornecido pelo enunciado $8^2.7^2 = 3136$, portanto, vimos que a combinação citada é, na verdade, superior ao proposto pelo enunciado.

Questão 41 A quantidade de maneiras distintas de distribuir os 15 turistas pelos 3 barcos, de forma que cada barco seja ocupado por exatamente 5 turistas, é superior a $2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^2$.

Resolução

Certo.

Nesse caso, precisamos escolher o primeiro grupo de 5 turistas para o primeiro barco no total de 15. Mais uma vez, usamos o conceito de combinação, porque a ordem não importa.

$\binom{15}{5}$	.		
1º Barco			**Total**

Até o momento, sobraram 10 turistas. Devemos escolher 5 deles para o 2º barco.

$\binom{15}{5}$	.	$\binom{10}{5}$	
1º Barco		**2º Barco**	**Total**

Os cinco turistas que sobraram estão automaticamente escolhidos para o terceiro barco. Porém, para fins didáticos, vamos calcular – escolher 5 turistas num total de 5.

$\binom{15}{5}$	.	$\binom{10}{5}$		$\binom{5}{5}$	
1º Barco		**2º Barco**		**3º Barco**	**Total**

Agora, só há mais um detalhe que precisamos calcular. Note que, até o momento, falamos em 1º barco, 2º barco e 3º barco. Porém, os três barcos são diferentes. Devemos, portanto, considerar o número de formas de organizar os três barcos nas três posições, ou seja, trata-se de uma permutação de 3 elementos.

$\binom{15}{5}$	.	$\binom{10}{5}$			$\binom{5}{5}$		3!		
1º Barco		**2º Barco**			**3º Barco**		**Permutações dos Barcos**		**Total**

Agora, basta fazer o produto.

$$N = \binom{15}{5}\binom{10}{5}\binom{5}{5}3! = \frac{15!}{5!\,10!}\frac{10!}{5!\,5!}\frac{5!}{5!\,0!} =$$

$$N = \frac{15.14.13.12.11}{5.4.3.2.1}\frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1}.1.3.2.1$$

$$N = 3003.252.6 > 3003.6.11^2 > 42^2.6.11^2 = 6.2^2.3^2.7^2.11^2$$

QUESTÃO 42 (CESPE/MEC/2014) A análise de requerimentos de certificação de entidades educacionais, no âmbito do Ministério da Educação, será realizada por uma equipe formada por, no mínimo, um analista contábil, um analista educacional e um analista processual. Considerando essa situação hipotética, julgue os itens subsecutivos.

A partir de cinco analistas contábeis, sete analistas educacionais e seis analistas processuais, a quantidade de maneiras distintas de se formar equipes com exatamente três analistas de cada especialidade em cada equipe é superior a 5.000.

Resolução

Certo.

Precisamos escolher 3 analistas contábeis dentre 5, depois 3 analistas educacionais dentre 7 e, por fim, 3 analistas processuais dentre 6. Dentro de cada escolha, não há funções diferentes, portanto, não existe preferência de ordem.

Como não importa a ordem, devemos usar o conceito de combinação.

$\binom{5}{3}$	x	$\binom{7}{3}$	x	$\binom{6}{3}$		$\binom{5}{3}\binom{7}{3}\binom{6}{3}$
Analista Contábil		**Analista Educacional**		**Analista Processual**		**Total**

O número de possibilidades é:

$$N = \binom{5}{3}\binom{7}{3}\binom{6}{3} = \frac{5!}{3!\,2!}\frac{7!}{3!\,4!}\frac{6!}{3!\,3!} = \frac{5.4}{2.1}\frac{7.6.5}{3.2.1}\frac{6.5.4}{3.2.1}$$

$$N = 10.36.20 = 7200 > 5000$$

Questão 43 (CESPE/BANCO DO BRASIL/2008/ESCRITURÁRIO) Caso as senhas de acesso dos clientes aos caixas eletrônicos de certa instituição bancária contenham 3 letras das 26 do alfabeto, admitindo-se repetição, nesse caso, a quantidade dessas senhas que têm letras repetidas é superior a 2×10^3.

Resolução

Errado.

A melhor maneira de fazer essa questão é considerar o total de senhas possíveis e retirar aquelas que têm as letras todas diferentes.

Para o total de senhas possíveis, devemos considerar que qualquer uma das letras pode ser empregada em qualquer posição, inclusive várias vezes.

26	x	26	x	26	$=26^3$
					Total

Agora, vamos calcular a quantidade de senhas que possuem as letras todas diferentes. Nesse caso, devemos escolher 3 letras dentre as 26; a ordem importa, pois, senhas com ordens diferentes são diferentes. Por exemplo, a senha ABC é diferente da senha CBA.

Para isso, usamos o conceito de arranjo.

26	x	25	x	24		$= A_{26}^{3}$ $= 26.25.24$
						Proibidas

Para saber o número de senhas que nos interessam, ou seja, aquelas que possuem, pelo menos uma letra repetida, basta fazer a diferença.

$$N = 26^3 - 26.25.24 = 26.(26^2 - 25.24)$$

$$N = 26.(676 - 600) = 26.76 = 1976 < 2000$$

Questão 44 (FCC/TST/2017/TÉCNICO JUDICIÁRIO/ÁREA ADMINISTRATIVA) O código de um sistema de classificação de processos é composto por três vogais juntas, seguidas por três algarismos. A ordenação começa com o 1º processo, cujo código é AAA000, e termina com o 125.000º processo, cujo código é UUU999, seguindo sempre a ordem alfabética das letras e ordem crescente do número composto pelos três algarismos. Nesse sistema de classificação, o 10.500º processo terá o código:

a) AEA501.

b) AIA499.

c) AIA501.

d) AIA500.

e) EAA499.

Resolução

Letra b.

Como o primeiro processo tem o código terminado em zeros AAA0000, o 10500º deve ser obtido a partir das divisões de 10499.

Para fazer a conversão, devemos observar quantas possibilidades existem em cada casa decimal.

5	x	5	x	5	X	10	X	10	X	10

Na parte com 5 algarismos, há as seguintes correspondências:

A – 0

E – 1

I – 2

O – 3

U – 4

Sendo assim, as três primeiras divisões devem ser feitas por 10 e as três últimas por 5. Façamos:

10499	10					
-10490	1049	10				
= (9)	-1040	104	10			
	=(9)	-100	10	5		
		=(4)	-10	2	5	
			=(0)	-0	0	5
				=(2)	-0	0
					=(0)	

Agora, basta pegar os restos das divisões e seus correspondentes no sistema de numeração desejado:

0		2		0		4		9		9
A		**I**		**A**		**4**		**9**		**9**

QUESTÃO 45 (FCC/SEGEP-MA/2016/AUDITOR-FISCAL DA RECEITA ESTADUAL) Jair tem 8 primos, dos quais irá convidar 5 para um jantar em sua casa. Ocorre que 2 dos 8 primos só podem ir ao jantar se forem juntos. O total de escolhas diferentes dos 5 convidados que Jair pode fazer para o jantar é igual a

a) 40.

b) 56.

c) 30.

d) 26.

e) 36.

Resolução

Letra d.

Jair tem duas opções: pode chamar os dois primos problemáticos OU não chamar nenhum. É importante destacar o conectivo ou, porque indica que faremos uma soma mais adiante.

Caso resolva convidar os dois primos, precisará escolher dentre os outros 6 mais 3 convidados. Sendo assim, o número de formas de escolher é:

$$n_1 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{6.5.4.3!}{3.2.1.3!} = 5.4. = 20$$

Por outro lado, caso não convide nenhum dos dois primos, precisará escolher 5 convidados dentre os demais 6 primos.

$$n_2 = \binom{6}{5} = \frac{6!}{5!\,1!} = \frac{6.5!}{5!\,1!} = 6$$

Sendo assim, o total de possibilidades para Jair é:

$$N = n_1 + n_2 = 20 + 6 = 26$$

Questão 46 (FCC/DPE-SP/2015/ANALISTA DE SISTEMAS) Para formar uma senha de quatro letras é permitido o uso de uma letra A, uma letra B, duas letras C e três letras D. Dentre todas as senhas possíveis nesse sistema, o número daquelas que tem exatamente três letras diferentes supera o número das demais em

a) 28.

b) 24.

c) 42.

d) 36.

e) 30.

Resolução

Letra e.

O sistema em questão é formado pelas letras ABCCDDD. São, portanto, 7 letras, sendo que existe repetição de 2 letras C e 3 letras D.

O total de senhas possíveis poderia ser calculado por um arranjo com repetição, mas nós não abordamos esse assunto no curso. Portanto, tentaremos outra forma. Vejamos todas as possibilidades para escolher as letras e anotaremos suas permutações.

As senhas podem ter todas as quatro letras diferentes, pode haver uma repetição de duas letras xyCC ou xyDD, pode haver duas repetições CCDD ou ainda a letra D pode se repetir três vezes (xDDD).

Contemos as senhas em que todas as letras são diferentes.

ABCD: 4! = 24

$$n_1 = 4! = 24$$

Agora, testemos as senhas que possuem repetição de duas letras, portanto, são dois C ou dois D. Para isso, precisamos escolher uma das letras C ou D para se repetir duas vezes. Das 3 letras restantes, precisamos escolher 2 para completar o código (xyCC ou xyDD). Por fim, precisamos contar as permutações.

$\binom{2}{1} = 2$	x	$\binom{3}{2} = 3$	x	$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4.3 = 12$
CC ou DD		Escolher duas letras das 3 restantes para serem as letras não repetidas.		Permutações entre as 4 letras da palavra, com repetição de duas.

Observe, ainda, que é exatamente esse o caso que nos interessa pelo enunciado, pois todas essas palavras possuem exatamente três letras diferentes.

$$n_2 = 2.3.12 = 72$$

Ainda há dois casos a analisar. No caso CCDD, temos que contar apenas as permutações.

$$n_3 = P_4^{2,2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{4.3}{2.1.} = 6$$

Por fim, há o caso xDDD. Para isso, precisamos escolher a segunda letra da senha e contar as permutações possíveis.

3	x	$P_4^3 = \frac{4!}{3!} = 4$
Escolher A, B ou C para completar a senha		Permutações entre as 4 letras da palavra, com repetição de três.

Dessa maneira, o total de possibilidades é:

$$n_4 = 3.4 = 12$$

Sendo assim, as demais senhas, ou seja, excluindo as senhas que apresentam exatamente três letras diferentes (n_2) é:

$$n_{demais} = n_1 + n_3 + n_4 = 24 + 6 + 12 = 42$$

Portanto, a diferença pedida no enunciado é:

$$n_2 - n_{demais} = 72 - 42 = 30$$

Questão 47 (FGV/SENADO FEDERAL/2008/ANALISTA LEGISLATIVO) Em uma reunião todas as pessoas se cumprimentaram, havendo ao todo 120 apertos de mão. O número de pessoas presentes nessa reunião foi:

a) 14
b) 15
c) 16
d) 18
e) 20

Resolução

Letra c.

Seja N o número de pessoas presentes na sala. Um aperto de mão é feito entre duas pessoas. Para definir um aperto de mão, precisamos escolher 2 pessoas dentre N, sem importar a ordem, tanto faz se A aperta a mão de B ou se B aperta a mão de A.

Sendo assim:

$$\binom{N}{2} = 120$$

$$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} = 120 \therefore N(N-1) = 120.2 = 240$$

Aqui, muitos(as) alunos(as) ficariam tentados a multiplicar N por N-1 e chegar a uma equação do segundo grau. Porém, podemos resolver tal problema de um modo mais simples.

Perceba que o número de pessoas na sala é inteiro, portanto, N e N-1 devem ser divisores de 240.

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	$2^4.3.5$

O modo mais fácil de obter os divisores de 240 é fatorando-o em fatores primos. Por sorte ou por destino, encontramos que a fatoração de 240 em fatores primos é

$$240 = 2^4.3.5 = 16.15$$

Isso nos permite concluir rapidamente que havia 16 pessoas na sala, pois N = 16 e (N-1) = 15, de modo que o produto N(N-1) = 240.

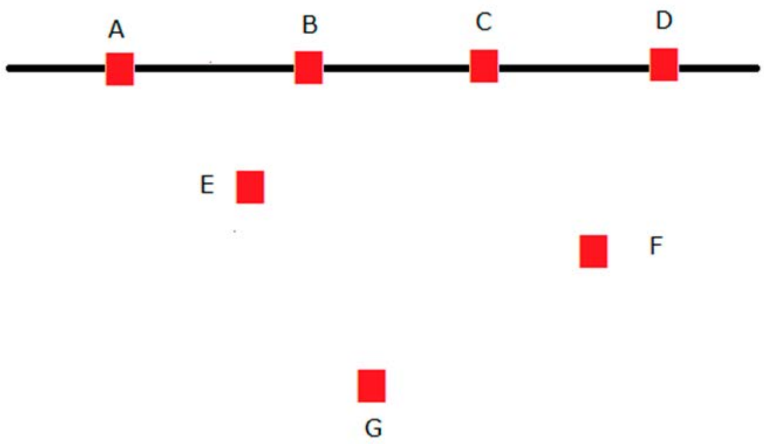
Questão 48 (ESAF/AFRFB/2009) Sabe-se que os pontos A,B,C, D, E, F e G são coplanares, ou seja, estão localizados no mesmo plano. Sabe-se, também, que destes sete pontos, quatro são colineares, ou seja, estão numa mesma reta. Assim, o número de retas que ficam determinadas por estes sete pontos é igual a:

a) 16
b) 28
c) 15
d) 24
e) 32

Resolução

Letra a.

De acordo com o enunciado, há a seguinte disposição dos pontos.

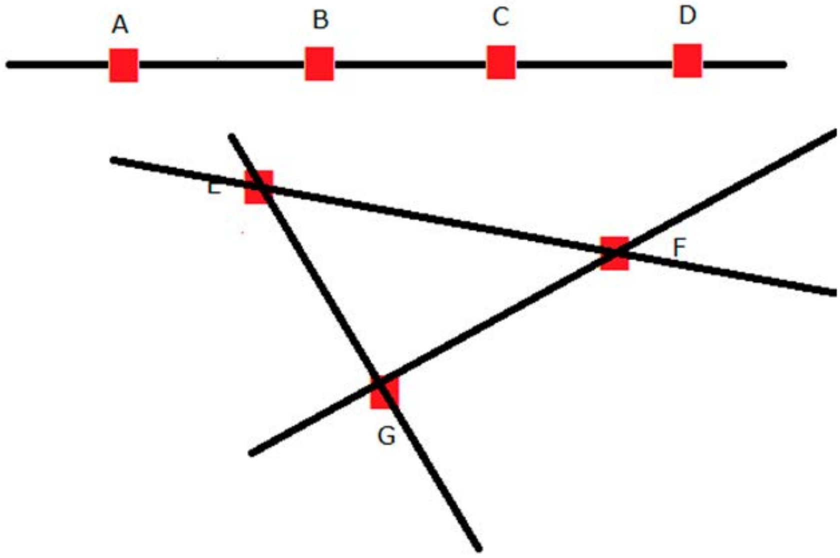


Para formar uma reta, devemos escolher dois pontos. Porém, perceba que escolher quaisquer dos quatro pontos colineares A, B, C e D, a reta formada será a mesma. Portanto, vamos separar o problema em três casos.

No primeiro caso, escolheremos quaisquer dos três pontos fora da reta (E, F ou G). Como a ordem não importa, há um total de:

$$n_1 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{3.2!}{2!\,.1} = 3$$

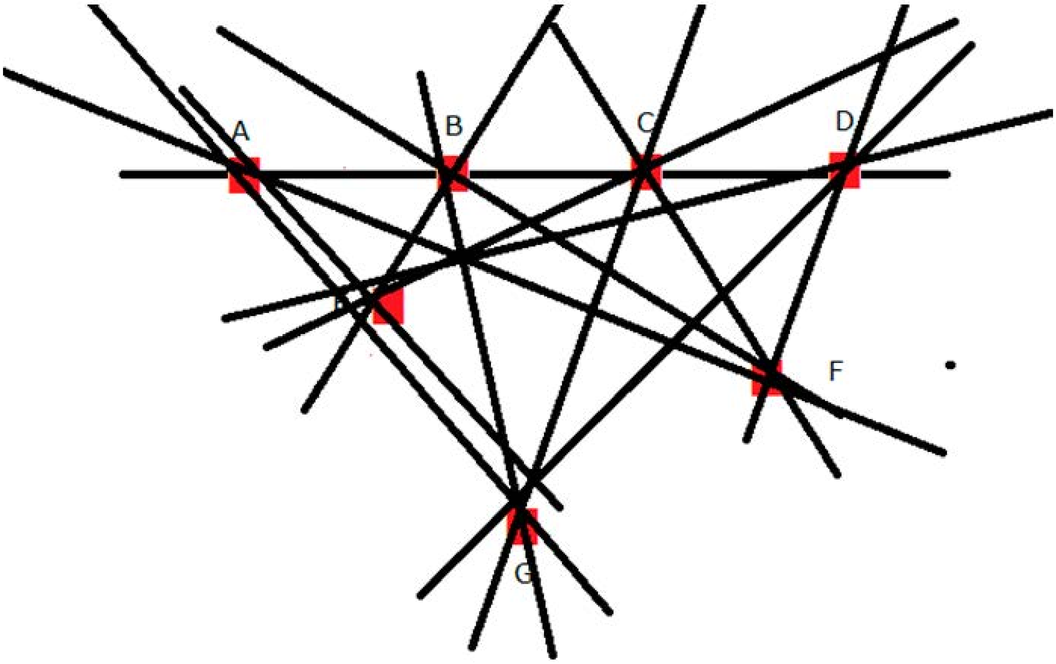
Essas três retas podem ser visualizadas:



No segundo caso, escolheremos um ponto fora da reta (E, F ou G) e um ponto na reta (A, B, C ou D). Nesse caso, há 3 possibilidades para o ponto fora e 4 possibilidades para o ponto na reta.

$$n_2 = 3.4 = 12$$

Essas doze retas podem ser visualizadas na figura. Perceba que há 4 retas saindo de cada ponto E, F e G.



Por fim, temos que adicionar a própria reta formada pelos quatro pontos colineares. Sendo assim, o total de retas é:

$$N = 3 + 12 + 1 = 16$$

QUESTÃO 49 (ESAF/AFRFB/2014) Um polígono regular possui 48 diagonais que não passam pelo seu centro. A partir desta informação, pode-se concluir que o número de lados desse polígono é igual a:

a) 12

b) 36

c) 24

d) 48

e) 22

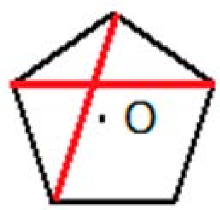
Resolução

Letra a.

Essa é uma questão deveras difícil. Mas fácil mesmo é ficar nas maravilhosas praias de Recife. Essa questão é para você passar em um dos concursos mais desejados do Brasil com um dos melhores planos de carreira de todo o serviço público – auditor-fiscal da Receita Federal. Então, tem que ser para rachar a cuca mesmo.

Em primeiro lugar, devemos entender o que são as diagonais de um polígono. As diagonais são segmentos de reta que unem dois vértices, mas que não são os lados.

Quando o polígono é formado por um número ímpar de lados, nenhuma diagonal passa pelo centro. Tomemos, como exemplo, este pentágono:

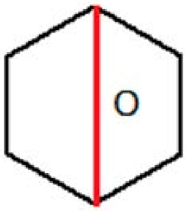


Para formar uma diagonal, primeiro devemos escolher um vértice. Há N opções. Depois, podemos escolher qualquer vértice que não seja o próprio vértice escolhido no passo anterior nem os seus dois vizinhos, pois, nesse caso, formariam um lado, não uma diagonal. Sendo assim, são N-3 opções.

Além disso, devemos descontar as permutações entre os dois vértices (2!). Isso acontece porque, quando traçamos a diagonal 1-3, é igual à diagonal 3-1. Sendo assim, o número de diagonais que não passam pelo centro será:

$$D = \frac{N(N-3)}{2!} = \frac{N(N-3)}{2}$$

Por outro lado, quando o número de lados for par, haverá uma situação importante a notar. Quando os vértices são diametralmente opostos, a diagonal passa pelo centro.



Dessa maneira, para formar uma diagonal, no primeiro passo, podemos escolher qualquer um dos N vértices. Mas, no segundo passo, não podemos escolher 4 opções: o próprio vértice já escolhido, os dois vizinhos e o que está diametralmente oposto. Além disso, devemos dividir por 2! Pelo mesmo motivo explicado anteriormente.

$$D = \frac{N(N-4)}{2!} = \frac{N(N-4)}{2}$$

Sendo assim, há duas expressões diferentes, a depender se o número de lados do polígono é par.

Podemos adotar um procedimento igual à questão anterior. Porém, também podemos testar diretamente as respostas.

Na letra A, há N = 12. Como 12 é par, o número de diagonais que não passam pelo centro de um polígono de 12 lados é:

$$D = 12.\frac{12-4}{2} = \frac{12.8}{2} = 48$$

Já encontramos a resposta.

QUESTÃO 50 (CESPE/FUB/2015/CONHECIMENTOS BÁSICOS/QUESTÃO MUITO TRAQUINA) (♥) copas, espadas (♠), ouros (♦) e paus (♣), viradas para baixo.As cartas do baralho, em ordem crescente de importância, são 2, 3,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Q (dama), J (valete), K (rei) e A (ás). Nesse jogo, cada jogador recebe cinco cartas e pode descartar algumas ou todas e receber outras novas, na mesma quantidade, de modo a ficar sempre com cinco cartas na mão. O jogador com o melhor jogo, isto é, com a sequência de cinco cartas que vale mais pontos, ganha a rodada. As sequências de jogos vencedoras no pôquer fechado, em ordem crescente de importância, são:

- par – formado por duas cartas de mesmo valor e três outras sem relação (por exemplo: [Q ♣] [Q ♠] [2 ♥] [4 ♥] [5♣]);
- dois pares – formado por duas cartas de mesmo valor, mais outras duas também de mesmo valor (mas de valor diferente do primeiro par) e uma carta não relacionada com as dos pares (por exemplo: [3♥] [3♦] [10♠] [10♥] [A♠]);
- trinca – formado por três cartas de mesmo valor e outras duas sem relação (por exemplo: [J♠] [J♦] [J♥] [6♥] [7♥]);
- straight (sequência) – formado por cinco cartas em sequência de naipes diferentes (por exemplo: [5 ♣] [6 ♠] [7 ♥] [8 ♥] [9 ♣]);
- flush – formado por cinco cartas do mesmo naipe (por exemplo: [4 ♣] [5 ♣] [10 ♣] [Q ♣] [J ♣]);
- full house – formado por um par e uma trinca (por exemplo: [Q ♣] [Q♠] [A♥] [A♠] [A♦]);
- quadra – formado por quatro cartas do mesmo valor e uma carta qualquer (por exemplo: [10♣] [10♠] [10♥] [10 ♦] [3♠]);
- straight flush – formado por cinco cartas em sequência e do mesmo naipe (por exemplo: [7♥] [8♥] [9♥] [10♥] [Q♥]);

- royal straight flush – formado pela sequência máxima, isto é, dez, dama, valete, rei e ás, todas do mesmo naipe (por exemplo: [10 ♠] [Q ♠] [J ♠] [K ♠] [A ♠]).

Com base nessas informações, julgue os seguintes itens, a respeito do jogo de pôquer fechado.

A quantidade de pares simples, e nenhum jogo melhor, que podem ser formados é igual a $6 \times 44 \times C_{13,9}$.

Resolução

Certo.

Essa é provavelmente uma das questões mais difíceis já produzidas para concursos públicos.

O que torna essa questão tão especial é o fato de que não podemos formar nenhum jogo melhor que um par.

Então, vamos proceder o seguinte:

- escolhemos um par de cartas para formar um par simples. Essas cartas precisam ser do mesmo número. Como só há um baralho, elas não podem ser do mesmo naipe, isso facilita bastante, pois não há a possibilidade de formar um flush ou um straight;
- as próximas três cartas precisam ser de números diferentes do número que foi escolhido anteriormente para não formar uma trinca e precisam ser de números diferentes entre si para não formarem outro par.

Vamos escolher as cartas que formam o par simples. Podemos tomar qualquer uma das 52 cartas. Portanto, para a primeira carta, há 52 opções. Para a segunda, precisamos escolher uma carta de mesmo número da anterior, portanto, só restam 3 opções, as cartas de naipes diferentes.

Exemplo: se escolhemos [10♣] na primeiro carta, só podemos escolher [10♠], [10♥] ou [10 ◆] na segunda.

52	X	3	-	-	=52.3
1ª Carta		**2ª Carta**			**Total**

Observe, ainda, que a ordem das cartas não importa. Por isso, precisamos dividir por 2!

Pouco importa se escolhemos [10♣] como a primeira carta e [10♠] como a segunda ou se trocamos a ordem, escolhendo [10♠] na primeira carta e [10♣] na segunda.

Portanto, o total de formas de escolher as cartas que formam o par simples é:

$$n_1 = \frac{52.3}{2!} = 26.3$$

No segundo passo, as próximas três cartas precisam ser de números diferentes e não podemos escolher o número já escolhido no passo anterior. Precisamos, portanto, escolher 3 números num total de 12.

Portanto, o número de maneira que podemos escolher os números das três cartas é:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{9!\,3!}$$

Já escolhemos os números dessas cartas. Porém, podem ser de qualquer naipe. Há 4 opções para o naipe da terceira carta, 4 opções para o naipe da quarta e 4 opções para o naipe da quinta.

$\binom{12}{3}$	x	4	x	4	x	4	$4^3\binom{12}{3}$
Números		**Naipe da 3ª**		**Naipe da 4ª**		**Naipe da 5ª**	**Total**

Portanto, o número de combinações possíveis é:

26.3	x	$4^3\binom{12}{3}$	
1ª e 2ª Cartas		**3ª, 4ª e 5ª Cartas**	**Total**

$$N = 26.3.4^3\binom{12}{3}$$

O Cespe ainda foi profundamente sagaz em trabalhar esse número.

$$N = 26.3.4^3\binom{12}{3} = 13.2.3.4^3.\frac{12!}{9!\,3!}$$

$$N = 13.6.4^3.\frac{12.11.10}{3.2.1} = 6.4^3\frac{13.12.11.10}{3.2.1}$$

Multiplicando por 4 em cima e embaixo, chegamos a mais um binomial.

$$N = 6.4^3.4\frac{13.12.11.10}{4.3.2.1} = 6.4^4.\frac{13!}{9!\,4!} = 6.4^4\binom{13}{4}$$

Como os binomiais $\binom{13}{4} = \binom{13}{9}$ são iguais, a afirmação está correta.

4. PROBABILIDADE

O conceito de probabilidade é talvez um dos mais importantes da Matemática e, se bem compreendido, mudará sua forma de ver o mundo.

O fato é que, na vida, na maioria das vezes, lidamos com incertezas. Todos os eventos possuem certa probabilidade de ocorrer. E é conhecendo essas probabilidades que poderemos tomar decisões mais racionais.

4.1. Noções sobre Conjuntos

Antes de adentrarmos no estudo da teoria de probabilidades, precisamos saber algumas noções básicas de conjuntos.

Considere o conjunto de eventos possíveis no lançamento de um dado.

Espaço Amostral de Eventos (Ω): representa todo o conjunto de eventos possíveis.

Exemplo: se estamos falando de um lançamento de um dado de seis faces, teríamos o espaço amostral .

Evento (A): é um evento qualquer para o qual se deseja calcular a probabilidade de ocorrência.

Exemplo: se queremos saber qual a probabilidade de o lançamento ser maior ou igual a 5, temos que A = {5, 6}.

Além disso, há algumas operações importantes. Vamos a elas.

Intersecção (∩) é representado pela palavra E.

Exemplo: considere dois eventos distintos. A é o evento anterior, ou seja, A ={5,6}. Já o evento B é o lançamento resultar em número ímpar, portanto, B = {1,3,5}.

A intersecção, representada por A ∩ B , corresponde ao evento de acontecer A e B **simultaneamente.** Para isso, precisamos tomar os elementos comuns entre esses dois conjuntos.

$$A \cap B=\{5\}$$

União (∪)é representado pela palavra OU.

A união, representada por A ∪ B, corresponde ao evento de acontecer, pelo menos, um dos dois eventos A ou B. Para isso, basta agrupar os elementos de ambos os conjuntos.

$$A \cup B=\{1,3,5,6\}$$

4.2. Axiomas de Kolmogorov

Os axiomas de Kolmogorov são um conjunto de definições básicas para a função que define a probabilidade de ocorrência de um evento.

São muito importantes no âmbito na Matemática pura, porém, infelizmente, em concursos, só podem ser cobrados literalmente, ou seja, uma questão bem decoreba que não vai acrescentar muito.

Agora, vejamos quais são esses tais axiomas.

- **Primeiro axioma:** a probabilidade de um evento qualquer é um número real não negativo: $P(A) \geq 0$
- **Segundo axioma:** a probabilidade de todo o espaço amostral é igual a 1: $P(\Omega)=1$
- **Terceiro axioma:** para eventos disjuntos, a probabilidade da união é a soma das probabilidades:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B), \text{ quando } A \cap B= \phi$$

O terceiro axioma é o mais importante para questões de prova. A união de dois eventos (A ∪ B) é expressa pelo operador OU.

Quando dizemos "qual a probabilidade de o dado dar 5 ou 6?", na verdade, há dois eventos.

A={5}, B= {6}

Como esses eventos são mutuamente exclusivos – o dado não pode dar 5 e 6 ao mesmo tempo –, a probabilidade de dar 5 ou 6 é igual à soma das probabilidades.

Em nível de concursos públicos, não faz sentido divagar sobre a importância desses axiomas. Tem muita matemática envolvida nisso.

Infelizmente, caso alguma questão nesse sentido seja cobrada, é preciso que você os tenha memorizados.

Direto do concurso

Questão 51 (FGV/IBGE/2016/TECNOLOGIA/ESTATÍSTICO) A teoria das probabilidades está apoiada em um conjunto de três axiomas, atribuídos a Kolmogorov. Sendo S o espaço amostral, A e B dois eventos, Ø do vazio e P(.) a medida de probabilidade, os axiomas estabelecem que:

a) $P(S) = 1$, $P(A) \geq 0$ e $P(A \cap B) = P(A).P(B)$;

b) $P(\emptyset) = 0$, $P(A) \leq 1$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

c) $P(A) \geq 0$; $P(A) = 1 - P(A^C)$ e $P(S) = 1$, A^C = Complementar de A;

d) $P(A) \geq 0$; $P(S) = 1$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ com $A \cap B = \emptyset$;

e) $P(A) \leq 1$; $P(S) = 1$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Resolução

Letra d.

Talvez você tenha notado meu tom de melancolia ao pedir para que decorasse os três axiomas de Kolmogorov. Mas, realmente, é triste quando uma Matemática tão bonita tem que ser empurrada goela abaixo.

Bom, vamos repeti-los para que você não se esqueça:

- **Primeiro axioma:** a probabilidade de um evento qualquer é um número real não negativo: $P(A) \geq 0$
- **Segundo axioma:** a probabilidade de todo o espaço amostral é igual a 1: $P(\Omega)=1$
- **Terceiro axioma:** para eventos disjuntos, a probabilidade da união é a soma das probabilidades:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B), \text{ quando } A \cap B=\phi$$

Gostaria de acrescentar que muitas alternativas apresentam consequências dos axiomas. Por exemplo, $P(A) \leq 1$ é uma consequência direta dos dois primeiros axiomas, pois, como a probabilidade de qualquer evento é não negativa e a probabilidade do universo é 1, então, a probabilidade de qualquer evento será menor que a probabilidade do universo.

No entanto, a questão não perguntou o que se poderia afirmar, mas sim o que estava escrito nos axiomas. Por isso, só há um gabarito.

4.3. Conceitos

Agora, começamos com a parte mais interessante do estudo de probabilidade.

4.3.1. Conceito Clássico

Você precisa saber que, no conceito clássico, as probabilidades de todos os eventos são iguais.

Por isso, a probabilidade é dada por:

$$P = \frac{\#Eventos\ Favoráveis}{\#Total\ de\ Possibilidades}$$

Por exemplo, considere que há um dado não viciado de seis faces. Qual é a probabilidade de obtermos, em um lançamento, o número maior ou igual a 5?

Ora, nesse caso, o total de possibilidades são 6, pois o nosso espaço amostral é (Ω)={1,2,3,4,5,6}. No entanto, apenas dois desses eventos são favoráveis (5 ou 6). Assim:

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

O conceito clássico é o mais importante para a sua prova, porque frequentemente utiliza conceitos de análise combinatória, ou seja, a contagem para o cálculo de probabilidades.

Em questões de prova, é muito comum ser útil calcular apenas os eventos não favoráveis. Nesse caso, há uma interessante expressão.

Pelo princípio da inclusão e exclusão, o número de eventos favoráveis será igual ao total de eventos menos os não favoráveis.

$$P = \frac{\#Eventos\ Favoráveis}{\#Total\ de\ Possibilidades} = \frac{\#Total - \#NãoFavoráveis}{\#Total}$$

$$P = 1 - \frac{\#Eventos\ NãoFavoráveis}{\#Total\ de\ Possibilidades}$$

4.3.2. Conceito Frequencial

Em muitos casos, não é possível fazer a suposição de que os vários eventos são equiprováveis. Por exemplo, qual a probabilidade de uma pessoa nascer loira?

Suponha que exista o seguinte espaço amostral de eventos para a cor do cabelo:

(Ω)={loiro, ruivo, castanho, preto}

Não faz sentido nenhum dizer que a probabilidade de uma pessoa nascer ruiva é a mesma de ela nascer de cabelo castanho, não acha?

Por isso, nesses casos, utilizamos o conceito frequencial. Para isso, simplesmente fazemos observações sobre quantas pessoas nasceram com cada cor de cabelo e calculamos a probabilidade pela razão entre o número de pessoas loiras e o total. Vejamos um exemplo.

Na tabela, há dados fictícios a respeito da coloração dos olhos e dos cabelos das pessoas em uma cidade.

	Cor dos cabelos				
Cor dos olhos	Loiro	Castanho	Preto	Ruivo	**Total**
Azul	1768	807	189	47	2811
Verde	946	1387	746	53	3132
Castanho	115	438	288	16	857
Total	2829	2632	1223	116	6800

Agora, suponha que queremos calcular.

- Calcule a probabilidade de que uma pessoa da amostra tenha olhos azuis. Basta pegar a frequência relativa de pessoas de olhos azuis em relação ao total:

$$P(A) = \frac{2811}{6800} = 0{,}413 = 41{,}3\%$$

- Calcule a probabilidade de que uma pessoa seja loira de olhos azuis. Fazemos o mesmo procedimento, mas, dessa vez, com as pessoas loiras de olhos azuis:

$$P(L \cap A) = \frac{1768}{6800} = 0{,}26 = 26\%$$

4.4. Eventos Independentes e Mutuamente Exclusivos

Dois eventos são independentes quando a ocorrência de um deles não influencia na ocorrência do outro. Nesse caso, aplica-se diretamente o princípio fundamental da contagem (PFC).

Se A e B são dois eventos independentes:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Como exemplo, há o lançamento consecutivo de dois dados não viciados.

Por exemplo, qual é a probabilidade de, em dois lançamentos de um dado, obtermos dois números iguais a 6?

1/6	**X**	**1/6**	**=1/6.1/6**
1º Dado		**2º Dado**	**Total**

$$P = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Considerando que o dado é não viciado, os resultados dos lançamentos são independentes. Por isso, podemos simplesmente aplicar o teorema que acabamos de ver.

Por outro lado, dois eventos são **mutuamente exclusivos** quando não podem acontecer simultaneamente.

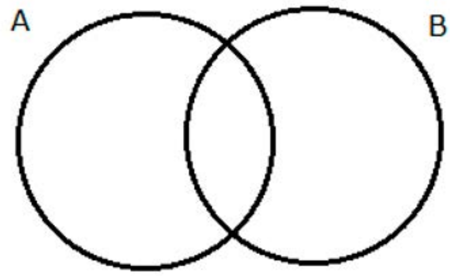
É o caso de A: fazer sol e B: chover. Chover e fazer sol são dois eventos mutuamente exclusivos, ou seja, a probabilidade de ocorrerem simultaneamente é igual a zero.

$$P(A \cap B) = 0$$

4.5. Probabilidade da União

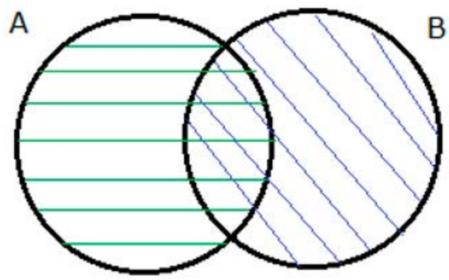
Trata-se de um assunto amplamente explorado em provas.

Para entender melhor a expressão que vai ser deduzida, vamos representar os eventos A e B por meio de diagramas.



Para calcular a probabilidade da união de dois eventos, devemos calcular o número de elementos dessa união.

Podemos começar somando os elementos de A com os elementos de B. Marcaremos os elementos de A com linhas horizontais verdes e os de B com linhas diagonais azuis.



Perceba, no entanto, que os elementos da intersecção foram contados duas vezes. Por isso, precisamos retirá-los, de modo que sejam contados apenas uma vez.

Dessa maneira, o número de elementos da união é:

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Agora, podemos calcular a probabilidade do evento união dividindo pelo número de elementos do espaço amostral.

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega} = \left(\frac{\#A}{\#\Omega}\right) + \left(\frac{\#B}{\#\Omega}\right) - \left(\frac{\#(A \cap B)}{\#\Omega}\right)$$

Sabemos que as razões acima representam probabilidades. Portanto, chegamos a uma importantíssima expressão:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Podemos generalizar essa expressão para três eventos. Caso tenha curiosidade, você poderá tentar deduzir, porém, isso vai dar um pouco de trabalho.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Há uma lógica relativamente simples para lembrar essa expressão. Perceba que:

$$P(A \cup B \cup C) = Soma\ das\ Probabilidades\ Um\ a\ Um - Probabilidades\ Dois\ a\ Dois + Probabilidade\ Três\ a\ Três$$

É só você se lembrar de que o sinal vai alternando. 1 a 1 é positivo, as probabilidades 2 a 2 entram com sinal negativo; 3 a 3 positivo. E assim por diante. Eu nunca vi em provas de concurso, mas se a questão colocar uma união de quatro ou mais eventos, você pode continuar: as intersecções 4 a 4 entram com sinal negativo, as 5 a 5, com sinal positivo e, por aí, vai.

E, agora, vamos treinar?

Direto do concurso

Questão 52 (FGV/TJ-BA/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICO) Na teoria das probabilidades, os conceitos de eventos independentes e eventos mutuamente exclusivos, apesar de distintos, guardam entre si uma estreita relação. Quando dois eventos são independentes:

a) são também mutuamente exclusivos;

b) não podem ser mutuamente exclusivos;

c) podem não ser mutuamente exclusivos, mas sua interseção deve ter probabilidade nula de ocorrência;

d) serão também mutuamente exclusivos se as probabilidades condicionais, de cada um dado o outro, forem idênticas;

e) os complementares devem ser mutuamente exclusivos.

Comentário

Letra b.

Perceba que os conceitos de eventos independentes e mutuamente exclusivos não são compatíveis.

Se dois eventos são mutuamente exclusivos, a ocorrência de um implica a não ocorrência do outro, portanto, não são independentes.

Questão 53 (CESPE/BRB/2010/ESCRITURÁRIO) A senha de um cartão de crédito possui quatro dígitos, que são algarismos entre 0 e 9, e a administradora desse cartão veda senhas em que todos os quatro algarismos sejam iguais, ou que os algarismos correspondam ao dia e mês de aniversário do titular do cartão. Por exemplo, se um indivíduo nasceu no dia 4 de março, a senha de seu cartão não pode ser 0403. É possível que diferentes cartões de crédito tenham a mesma senha.

A senha é solicitada sempre que o titular realizar algum pagamento; se o portador do cartão errar ao informar a senha por três vezes consecutivas, o cartão é bloqueado imediatamente.

Com base no texto acima, julgue os itens a seguir.

Se um indivíduo nasceu no primeiro semestre do ano, então um número de quatro dígitos, escolhido aleatoriamente, tem mais de 99,9% de chance de ser uma senha possível para ele.

Resolução

Errado.

Se o indivíduo nasceu no primeiro semestre, isso significa que os dois dígitos que representam seu mês de nascimento são diferentes – 01, 02, 03, 04, 05 e 06 apresentam essa característica. Trata-se de uma informação relevante.

Nesse caso, o indivíduo terá um total de 11 senhas proibidas: as 10 senhas envolvendo algarismos todos iguais 0000, 1111, ..., 9999 e seu próprio aniversário.

O total de senhas possíveis é dado pelo PFC:

10	**x**	**10**	**x**	**10**	**x**	**10**	**=10^4**
							Total

Agora, podemos calcular a probabilidade usando o princípio da inclusão e exclusão:

$$N = 1 - \frac{11}{10^4} = 1 - 0{,}0011 = 0{,}9989 = 99{,}89\% < 99{,}9\%$$

Questão 54 (FGV/TJ-BA/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Considere um jogo que consiste no lançamento de um dado, honesto, uma ou duas vezes. O objeto só será utilizado pela segunda vez se o resultado do primeiro lançamento for um número ímpar. Assim sendo, a probabilidade de que o total de pontos obtidos seja igual a seis é:

a) 1/12

b) 1/18

c) 7/12

d) 5/18

e) 1/4

Resolução

Letra e.

A FGV sempre nos brinda com questões interessantes.

Precisamos dividir o problema em dois casos.

Se o primeiro lançamento resultar em um número par, o jogo acabará ali. Portanto, a única possibilidade de a soma dos dados ser igual a 6 é se realmente:

$$P_1 = \frac{1}{6}$$

O segundo caso é se o primeiro dado for ímpar. Nesse caso, para a soma ser igual a 6, o segundo dado é determinado pelo primeiro. Se o primeiro dado for 1, o segundo terá que será 5. Se o primeiro dado for 3, o segundo terá que ser 3 também. E, se o primeiro dado for 5, o segundo terá que ser igual a 1.

Como os lançamentos de dados são eventos independentes:

3/6	**x**	**1/6**	
1º Dado ímpar		**2º Dado conveniente**	**Total**

$$P_2 = \frac{3}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Sendo assim, há duas possibilidades para acontecer o nosso evento desejado, a soma dos dados ser igual a 6: o primeiro lançamento é igual a 6 ou as combinações 1+5, 3+3 e 5+1. Como há o operador OU, devemos somar as probabilidades.

$$P = P_1 + P_2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2+1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Questão 55 (FGV/2016/IBGE/ANALISTA) Suponha que, de um baralho normal, contendo 52 cartas de quatro naipes, é extraído, sem reposição e aleatoriamente, um total de quatro cartas. Se a carta "Ás" é equivalente a uma figura (ou seja, são 4 figuras e 9 números de cada naipe), é correto afirmar que a probabilidade de que todas sejam:

a) Do mesmo naipe é igual a $\left(\frac{13}{52}\right)\left(\frac{12}{51}\right)\left(\frac{11}{50}\right)\left(\frac{10}{49}\right)$

b) Figuras é igual a $\left(\frac{10}{52}\right)\left(\frac{9}{51}\right)\left(\frac{8}{50}\right)\left(\frac{7}{49}\right)$

c) Do mesmo número é igual a $\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right)\left(\frac{2}{50}\right)\left(\frac{1}{49}\right)$

d) Números é igual a $\left(\frac{36}{52}\right)\left(\frac{35}{51}\right)\left(\frac{34}{50}\right)\left(\frac{33}{49}\right)$

e) De naipes diferentes é igual a $4.\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{12}{51}\right)\left(\frac{8}{50}\right)\left(\frac{4}{49}\right)$

Resolução

Letra d.

Essa é daquelas questões que são horríveis quando aparecem na prova. Porém, no material, é uma questão bastante educativa, pois ensina a calcular várias probabilidades diferentes.

A escolha de duas cartas diferentes são eventos independentes. Porém, é importante frisar que, como o baralho é extraído sem repetição, o número de cartas vai diminuindo à medida que são retiradas.

Analisemos as alternativas individualmente.

Em primeiro lugar, calculemos a probabilidade de que todas as cartas sejam do mesmo naipe. A primeira carta removida pode ser qualquer uma das 52 cartas presentes no baralho.

$\frac{52}{52}$	x		x		x		
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

A segunda carta, porém, deve ser do mesmo naipe da primeira. Restaram 51 cartas no baralho e 12 cartas do mesmo naipe da primeira. Portanto, a probabilidade de que a segunda carta seja do mesmo naipe da primeira é 12/51.

$\frac{52}{52}$	x	$\frac{12}{51}$	x		x		
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

Fazendo o mesmo raciocínio para as demais cartas, na terceira carta, restaram 11 cartas do mesmo naipe e 50 cartas no baralho. Depois, na quarta carta, restaram 10 cartas do mesmo naipe e 49 cartas no baralho.

$\frac{52}{52}$	x	$\frac{12}{51}$	x	$\frac{11}{50}$	x	$\frac{10}{49}$	$4.\frac{13}{52}.\frac{12}{51}.\frac{11}{51}.\frac{10}{51}$
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**	**Total**

Portanto, a letra "a" está errada. A probabilidade real é quatro vezes maior que a sugerida no enunciado.

Agora, vamos calcular a probabilidade de que todas as cartas sejam figuras. Para isso, a primeira carta deve ser uma figura. Há 4 figuras de cada 4 naipe, um total de 16 figuras no baralho.

Portanto, a primeira carta deve ser uma das 16 figuras do total de 52 cartas no baralho.

$\frac{16}{52}$	x		x		x			
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**		**Total**

A segunda carta deve ser uma das 15 figuras que sobraram no total de 51 cartas do baralho. E, assim, por diante, na terceira carta, sobraram 14 figuras no total de 50 cartas; e, na quarta, sobraram 13 figuras no total de 49 cartas.

Aplicando o conceito de eventos independentes:

$\frac{16}{52}$	x	$\frac{15}{51}$	x	$\frac{14}{50}$	x	$\frac{13}{49}$		$=\frac{16}{52}\cdot\frac{15}{51}\cdot\frac{14}{50}\cdot\frac{13}{49}$
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**		**Total**

Vemos, portanto, que a letra "b" está errada.

Vamos calcular agora a probabilidade de que todas as cartas sejam do mesmo número. Para isso, a primeira carta deve ser um número. Há 9 números de cada um dos 4 naipes, portanto, um total de 36 números no baralho.

A primeira carta pode ser qualquer uma dessas 36 no total de 52 cartas do baralho.

$\frac{36}{52}$	x		x		x			
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**		**Total**

A segunda carta deve ser do mesmo número da primeira. Sobraram apenas 3 cartas com o mesmo número, que são as cartas dos outros naipes. Por exemplo, se tiramos 10 de paus, as cartas que podem ser selecionadas são 10 de copas, 10 de espadas ou 10 de ouros. São apenas 3 cartas num total de 51 no baralho.

$\frac{36}{52}$	x	$\frac{3}{51}$	x		x			
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**		**Total**

Para a terceira carta, sobraram apenas duas opções no total de 50 cartas do baralho. Para a quarta carta, somente sobrou o último naipe dentre as 49 cartas restantes do baralho.

$\frac{36}{52}$	x	$\frac{3}{51}$	x	$\frac{2}{51}$	x	$\frac{1}{51}$		$= \frac{36}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{51} \cdot \frac{1}{51}$
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**		**Total**

Mais um erro. Vejamos, agora, a probabilidade de que sejam todas cartas de números. Já vimos que o baralho tem um total de 36 números dentre as 52 cartas. Portanto, a primeira carta pode ser qualquer um dos 36 números. Para a segunda carta, sobraram 35 números dentre 51 cartas de baralho. Para a terceira, sobraram 34 números dentre 50 cartas de baralho. E, para a última, sobraram 33 números dentre 49 cartas.

$\frac{36}{52}$	x	$\frac{35}{51}$	x	$\frac{34}{51}$	x	$\frac{33}{51}$		$= \frac{36}{52} \cdot \frac{34}{51} \cdot \frac{34}{51} \cdot \frac{33}{51}$
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**		**Total**

Chegamos ao nosso gabarito. Porém, vamos calcular a probabilidade de que as cartas sejam de naipes diferentes.

Para isso, a primeira carta pode ser qualquer uma das 52. Não há nenhuma restrição aqui. Para a segunda carta, podemos escolher apenas 3 naipes, pois um deles já foi retirado na primeira carta. Como cada naipe tem 13 cartas (4 números e 9 figuras), restaram 39 opções dentre o total de 51 cartas.

Para a terceira carta, já foram eliminados 2 naipes, sobrando apenas 2, o que equivale a 26 cartas em um total de 50 cartas. Por fim, para a última carta, só restam 13 cartas a serem escolhidas, correspondentes ao único naipe que ainda não foi sorteado, num total de 49 cartas.

$\frac{52}{52}$	x	$\frac{39}{51}$	x	$\frac{26}{51}$	x	$\frac{13}{51}$		$\frac{52}{52}\cdot\frac{39}{51}\cdot\frac{26}{51}\cdot\frac{13}{51}$
1ª Carta		**2ª Carta**		**3ª Carta**		**4ª Carta**		**Total**

Questão 56 (CESPE/SERES-PE/2017/AGENTE DE SEGURANÇA PENITENCIÁRIA/ADAPTADA) De uma urna que continha 20 bolas idênticas, identificadas por números de 1 a 20, foi extraída aleatoriamente uma bola. Esse evento define o espaço amostral Ù = {1, 2, 3,..., 20}.

Considere os seguintes eventos:

A = {a bola retirada da urna é identificada por um número múltiplo de 4};

B = {a bola retirada da urna é identificada por um número múltiplo de 5}.

A probabilidade do evento

Resolução

Errado.

Vamos calcular a probabilidade dos eventos A e B separadamente.

$$A = \{4, 8, \ldots, 20\}$$

Perceba que os elementos de A formam uma progressão aritmética de razão 4. Portanto, podemos calcular o número de termos por:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \therefore 20 = 4 + (n_A - 1).4$$
$$\therefore\ 20 - 4 = (n_A - 1).4 \therefore \frac{16}{4} = n_A - 1 \therefore n_A = 4 + 1 = 5$$

Nessa questão, você não precisaria ter feito uma PA, porque o conjunto A era pequeno. Bastava você ir completando A = {4, 8, 12, 16, 20}. Porém, é bom você aprender a fazer por meio de uma PA, porque, caso a questão desse que o espaço amostral fosse até um número muito grande como 1.000, você também saberia fazer a questão.

Façamos o mesmo procedimento com o evento B = {5, 10, 15, 20} que possui quatro elementos.

Agora, precisamos saber também o número de elementos da intersecção. Ser múltiplo de 4 e de 5 ao mesmo tempo significa ser múltiplo do MMC entre 4 e 5 que é 20. Dessa maneira:

$$A \cap B = \{20\}$$

Agora, vamos ao cálculo da probabilidade da união:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$$
$$= 0{,}40$$

QUESTÃO 57 (FGV/SEFAZ-RJ/2010/AGENTE FISCAL DE RENDAS) Se A e B são eventos independentes com probabilidades P[A] = 0,4 e P[B] = 0,5 então P[A ∪ B] é igual a:

a) 0,2

b) 0,4

c) 0,5

d) 0,7

e) 0,9

Resolução

Letra d.

Quando o assunto é probabilidade, não existe banca melhor que a FGV. Mais uma questão muito inteligente. A probabilidade da união é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Como os eventos são independentes:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}4.0{,}5 = 0{,}2$$

Agora, basta substituir:

$$P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$$

QUESTÃO 58 (FGV/SEFAZ-RJ/2008/AGENTE FISCAL DE RENDAS) Sejam A, B e C três eventos quaisquer definidos em um espaço amostral S. Então, $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$ refere-se à probabilidade de ocorrência de:

a) Um ou dois eventos

b) Exatamente um dos eventos

c) Pelo menos um dos eventos

d) No máximo um dos eventos

e) Pelo menos dois eventos

Resolução

Letra a.

Vamos desmembrar a expressão da união de três conjuntos:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

A expressão fornecida no enunciado foi:

$$P(A \cup B \cup C) - P(A \cap B \cap C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$$

Perceba, portanto, que a soma fornecida no enunciado é equivalente a:

$$P(A \cup B \cup C) - P(A \cap B \cap C)$$

Agora, precisamos entender o significado de cada uma dessas probabilidades:

- $P(A \cup B \cup C)$: ocorrência de, pelo menos, um evento;
- $P(A \cap B \cap C)$: ocorrência dos três eventos simultaneamente.

A diferença dessas duas probabilidades corresponde à probabilidade de ocorrer, pelo menos, um evento, mas não ocorrer os três simultaneamente. Portanto, é a probabilidade de ocorrer um ou dois eventos.

Questão 59 (FGV/SEFIN-RO/2018/AUDITOR-FISCAL) Dois eventos A e B têm probabilidades iguais a 70% e 80%. Os valores mínimo e máximo da probabilidade da intersecção de A e B são:

a) 20% e 50%

b) 20% e 70%

c) 50% e 70%

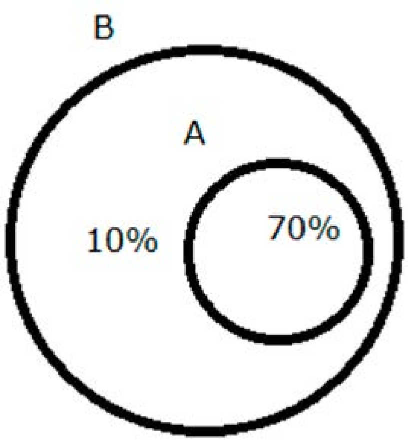
d) 0% e 70%

e) 30% e 50%

Resolução

Letra c.

Sagaz como sempre a FGV. O caso em que a intersecção entre os dois eventos é máxima acontece quando A está inteiramente contido em B.



Nesse caso:

$$P_{max}(A \cap B) = P(A) = 70\%$$

Por outro lado, precisamos ter em mente que a união entre esses dois conjuntos não pode exceder o espaço amostral, portanto, a probabilidade da união não pode exceder 100%. Assim:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 100\%$$

$$70\% + 80\% - P(A \cap B) \leq 100\%$$

$$150\% - P(A \cap B) \leq 100\%$$

$$150\% - 100\% \leq P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) \geq 50\%$$

Em outras palavras, o valor mínimo da probabilidade de intersecção é:

$$P_{min}(A \cap B) = 50\%$$

Chegamos ao final da nossa aula.

Não se esqueça de me seguir no Instagram: **www.instagram.com/thiago-fernando.pe**

Até o nosso próximo encontro. Forte abraço!

Thiago Cardoso

QUESTÕES COMENTADAS EM AULA

QUESTÃO 1 Bruna tem 4 camisas, 2 calças, 1 saia e 3 sapatos. De quantas formas diferentes ela pode se vestir?

QUESTÃO 2 (PGE-RO/2015/TÉCNICO DA PROCURADORIA) Quatro processos, numerados de 1 a 4, deverão ser distribuídos entre três procuradores: Átila, Hércules e Ulisses. Um mesmo procurador pode receber até quatro processos, exceto o procurador Átila, que não pode receber o processo número 2.

O número de maneiras diferentes de se fazer tal distribuição é:

a) 81
b) 64
c) 54
d) 11
e) 8

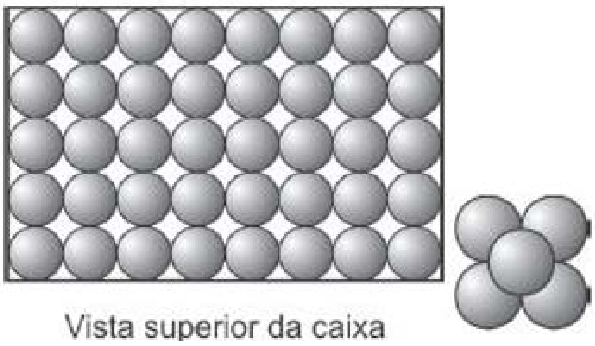
QUESTÃO 3 (ESAF/FUNAI/2016) Considere as quatro letras A, C, G e T formando pares de letras nos quais A só forma par com T e C só forma par com G. Indique quantas sequências distintas de três pares ordenados de letras e com repetição podem ser formadas.

a) 4
b) 8
c) 16
d) 32
e) 64

QUESTÃO 4 (FGV/DPE-RO/2015/TÉCNICO DA DEFENSORIA PÚBLICA) Considere todas as placas de veículos desde NCD-4000 até NCD-9999. O número de placas que possuem os dígitos todos diferentes é:

a) 2.520
b) 3.024
c) 3.528
d) 3.786
e) 4.032

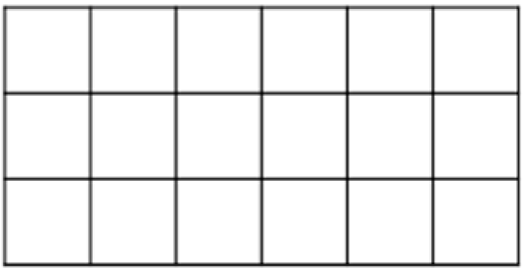
Questão 5 (FGV/MEC/2009/DOCUMENTADOR) Em uma caixa, foram colocadas 40 bolas de sinuca, dispostas sobre o fundo da caixa, como apresentado na figura. A seguir, outras bolas foram empilhadas sobre as 40 primeiras, de tal forma que cada bola sempre ficasse apoiada sobre outras quatro, como ilustrado abaixo.


Vista superior da caixa

Sabendo-se que a construção não foi desrespeitada, assinale a alternativa que apresenta a quantidade máxima possível de bolas de sinuca dentro da caixa.

a) 112
b) 100
c) 96
d) 86
e) 68

Questão 6 (ESAF/AFRFB/2009) Considere um retângulo formado por pequenos quadrados iguais, conforme a figura abaixo. Ao todo, quantos quadrados de quaisquer tamanhos podem ser contados nessa figura?



a) 128

b) 100

c) 63

d) 32

e) 18

QUESTÃO 7 (FCC/SEDU-ES/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) São realizados três lançamentos, em sequência, de um dado com faces numeradas de 1 a 6. Com os resultados obtidos, em cada três lançamentos, forma-se um número de três algarismos. Por exemplo: se os resultados obtidos foram, nessa ordem, 2; 6 e 3, o número formado será 263. A quantidade de números diferentes, e que sejam menores do que 500, que podemos formar dessa maneira é igual a:

a) 499.

b) 186.

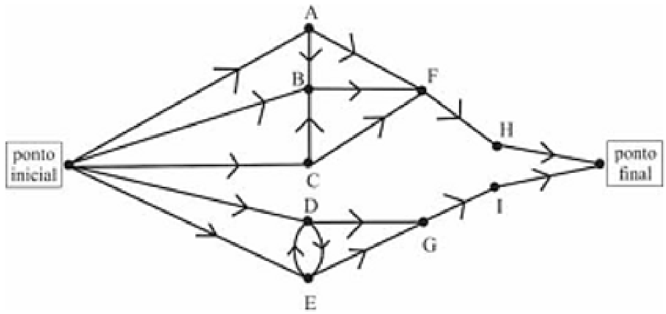
c) 399.

d) 144.

e) 400.

QUESTÃO 8 (CESPE/PREFEITURA DE SÃO PAULO-SP/2016/ASSISTENTE DE GESTÃO DE POLÍTICAS PÚBLICAS I) A questão da mobilidade urbana é um dos problemas que mais preocupam a população de grandes centros, como a cidade de

São Paulo. A figura apresentada mostra as possibilidades de vias, em um centro urbano, para se deslocar de um ponto inicial até um ponto final, passando pelos pontos intermediários A, B, C, D, E, F, G, H ou I. Cada seta indica o sentido do fluxo de uma via ligando dois desses pontos. Dois caminhos que permitem o deslocamento desde o ponto inicial até o ponto final são denominados distintos se um deles incluir pelo menos uma via distinta. Considerando essas informações, a quantidade de caminhos distintos que permitem o deslocamento do ponto inicial até o ponto final é:



a) inferior a 7.

b) igual a 7.

c) igual a 8.

d) igual a 9.

e) superior a 9.

Questão 9 (FGV/SSP-AM/2015/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR) Uma urna A contém cinco bolas numeradas com os números 1, 3, 5, 7 e 9. Uma urna B também contém cinco bolas, mas numeradas com os números 0, 2, 4, 6 e 8.

Retira-se, aleatoriamente, uma bola de cada urna e somam-se os números das duas bolas.

O número de valores diferentes possíveis para essa soma é:

a) 25

b) 21

c) 17

d) 13

e) 9

Questão 10 (FGV/CGE-MA/2014/AUDITOR) João lançou um dado três vezes seguidas e a soma dos resultados deu 15. O número de maneiras possíveis para a sequência dos três resultados é:

a) 3

b) 5

c) 7

d) 9

e) 10

Questão 11 (CESPE/TRE-GO/2015/TÉCNICO JUDICIÁRIO) As prestações de contas das campanhas dos 3 candidatos a governador de determinado estado foram analisadas por 3 servidores do TRE desse estado. Considerando que um servidor pode analisar nenhuma, uma ou mais de uma prestação de contas e que, por coincidência, cada um dos 3 candidatos é parente de um dos 3 servidores, julgue o item que se segue.

A quantidade de maneiras distintas de se distribuírem as prestações de contas entre os 3 servidores de modo que nenhum deles analise as contas de um parente é superior a 5.

Questão 12 (CESPE/MEC/2014) A análise de requerimentos de certificação de entidades educacionais, no âmbito do Ministério da Educação, será realizada por uma equipe formada por, no mínimo, um analista contábil, um analista educacional e um analista processual. Considerando essa situação hipotética, julgue os itens subsecutivos.

A partir de cinco analistas contábeis, sete analistas educacionais e seis analistas processuais, é possível formar mais de 300 equipes distintas com exatamente um analista de cada especialidade em cada equipe.

Questão 13 (FCC/TRF-1ª REGIÃO/2007/TÉCNICO JUDICIÁRIO/ÁREA ADMINISTRATIVA) Um técnico judiciário foi incumbido da montagem de um manual referente aos Princípios Fundamentais da Constituição Federal. Sabendo que, excluídas a capa e a contracapa, a numeração das páginas foi feita a partir do número 1 e, ao concluí-la, constatou-se que foram usados 225 algarismos, o total de páginas que foram numeradas é

a) 97
b) 99
c) 111
d) 117
e) 126

Questão 14 (QUESTÃO INÉDITA) Em uma lanchonete, há 5 sabores diferentes de sanduíches, 6 sabores diferentes de sucos e 3 sabores de sobremesas. Um pedido é composto por, no máximo, um sanduíche, um suco ou uma sobremesa, mas não necessariamente. Sendo assim, é possível que o cliente peça somente um suco ou somente um sanduíche, mas ele não pode pedir dois sanduíches no mesmo pedido. Determine quantos pedidos diferentes podem ser feitos nessa lanchonete.

Questão 15 (FGV/2015/PREFEITURA DE CUIABÁ-MT/PROFESSOR DE PEDAGOGIA) Em uma sacola há uma bola branca, duas pretas e quatro vermelhas. Não há outras bolas na sacola além dessas que foram citadas. Retiram-se quatro bolas da urna, aleatoriamente. Sobre as bolas retiradas, é correto afirmar que:

a) Todas são vermelhas.

b) No máximo uma é vermelha.

c) Pelo menos uma é preta.

d) Pelo menos duas são da mesma cor.

e) Pelo menos duas são vermelhas.

QUESTÃO 16 (CESPE/TJ-SE/2014) O rito processual de análise de determinado tipo de processo segue as três seguintes fases:

instrução: após a apresentação da representação e das provas, o juiz decide pela admissibilidade ou não do caso;

julgamento: admitido o caso, o juiz analisa o mérito para decidir pela culpa ou não do representado;

apenação: ao culpado o juiz atribui uma pena, que pode ser ou o pagamento de multa, ou a prestação de serviços à comunidade.

A partir das informações acima, considerando que a probabilidade de que ocorra erro de decisão na primeira fase seja de 10%, na segunda, de 5% e, na terceira, de 3%, e que a ocorrência de erro em uma fase não influencie a ocorrência de erro em outras fases, julgue os próximos itens.

Para cada processo do referido tipo, desconsiderando os possíveis erros de decisão, a quantidade de possíveis decisões durante o rito processual é superior a 5.

QUESTÃO 17 (FCC/SEDU-ES/2016/PROFESSOR DE MATEMÁTICA) Em uma gaveta há 5 pares de meias pretas, 7 pares de meias vermelhas e 10 pares de meias brancas. O número mínimo de pares de meias que precisam ser retirados da gaveta, sem que se veja a cor, para que certamente sejam retirados pelo menos três pares de meias de cores diferentes é

a) 4.

b) 15.

c) 6.

d) 13.

e) 18.

Questão 18 (FGV/TJ-PI/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/OFICIAL DE JUSTIÇA) Em um saco A há somente fichas vermelhas e em um saco B há somente fichas amarelas, sendo 7 fichas em cada saco. Retiram-se 3 fichas do saco A, que são então colocadas no saco B. Depois, retiram-se aleatoriamente 3 fichas do saco B, que são então colocadas no saco A. É correto concluir que ao final do procedimento descrito:

a) há no máximo 4 fichas vermelhas no saco A

b) há exatamente 4 fichas vermelhas no saco

c) há exatamente 4 fichas amarelas no saco

d) o número de fichas amarelas no saco A é menor do que o número de fichas vermelhas no saco B

e) o número de fichas vermelhas no saco A é igual ao número de fichas amarelas no saco B

Questão 19 (FCC/TRT-4ª REGIÃO/RS/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO) Em uma caixa há 30 bolas, numeradas de 1 a 30, todas com numeração diferente. O menor número de bolas que devem ser retiradas ao acaso dessa caixa para se obter, com certeza, duas bolas com numeração ímpar e menor que 19 é igual a

a) 24.
b) 23.
c) 21.
d) 19.
e) 22.

Questão 20 (IBFC/MPE-SP/2011/AUXILIAR DE PROMOTORIA/MOTORISTA) Um livro de ensino médio tem 262 páginas. Os exercícios estão dispostos nas páginas numeradas com múltiplos de 5 e as soluções dos exercícios estão dispostas nas páginas numeradas com múltiplos de 13. O número de folhas que não figuram exercícios ou soluções é de:

a) 64
b) 67
c) 124
d) 190

Questão 21 (FCC/TJ-PE/2012) A palavra GOTEIRA é formada por sete letras diferentes. Uma sequência dessas letras, em outra ordem, é TEIGORA. Podem ser escritas 5040 sequências diferentes com essas sete letras. São 24 as sequências que terminam com as letras GRT, nessa ordem, e começam com as quatro vogais. Dentre essas 24, a sequência AEIOGRT é a primeira delas, se forem listadas alfabeticamente. A sequência IOAEGRT ocuparia, nessa listagem alfabética, a posição de número:

a) 11
b) 13
c) 17
d) 22
e) 23

Questão 22 (CESPE/TRE-MT/2015) Em um campeonato de futebol amador de pontos corridos, do qual participam 10 times, cada um desses times joga duas vezes com cada adversário, o que totaliza exatas 18 partidas para cada. Considerando-se que o time vencedor do campeonato venceu 13 partidas e empatou 5, é correto afirmar que a quantidade de maneiras possíveis para que esses resultados ocorram dentro do campeonato é.

a) superior a 4.000 e inferior a 6.000.

b) superior a 6.000 e inferior a 8.000.

c) superior a 8.000.

d) inferior a 2.000.

e) superior a 2.000 e inferior a 4.000.

Questão 23 (FGV/CODESP-SP/2010/ADVOGADO) Há seis contêineres diferentes que deverão ser empilhados, três mais pesados embaixo e três mais leves em cima. O número de maneiras de se fazer essa arrumação, mantendo os três mais pesados embaixo e os três mais leves em cima é:

a) 18

b) 6

c) 9

d) 36

e) 72

Questão 24 (FGV/PC-MA/2012/AUXILIAR DE PERÍCIA MÉDICO-LEGAL) Considere as 24 permutações das letras P, C, E e M. Se colocarmos essas 24 permutações em ordem alfabética, a permutação PCEM ocupará a posição de ordem:

a) 24

b) 21

c) 19

d) 18

e) 17

Questão 25 (FGV/AL-BA/2014/TÉCNICO DE NÍVEL SUPERIOR/ECONOMIA) A sigla de Assembleia Legislativa do Estado da Bahia é "ALBA". Embaralhando as letras de ALBA, o número de sequências diferentes que podem ser formadas com essas mesmas 4 letras é:

a) 4

b) 6

c) 8

d) 10

e) 12

Questão 26 (CESPE/BANCO DO BRASIL/2008/ESCRITURÁRIO) A quantidade de permutações distintas que podem ser formadas com as 7 letras da palavra REPETIR, que começam e terminam com R, é igual a 60.

Questão 27 (FGV/MRE/2016/OFICIAL DE CHANCELARIA) André, Beatriz e Carlos são adultos, Laura e Júlio são crianças e todos vão viajar em um automóvel com 5 lugares, sendo 2 na frente e 3 atrás. Dos adultos, somente Carlos não sabe dirigir. As crianças viajarão atrás, mas Júlio faz questão de ficar em uma janela. O número de maneiras diferentes pelas quais essas pessoas podem ocupar os cinco lugares do automóvel é:

a) 12

b) 16

c) 18

d) 20

e) 24

Questão 28 (ESAF/AFRB/2012) Na prateleira de uma estante, encontram-se 3 obras de 2 volumes e 2 obras de 2 volumes, dispondo-se, portanto, de um total de 10 volumes. Assim, o número de diferentes maneiras que os volumes podem ser organizados na prateleira, de modo que os volumes de uma mesma obra nunca fiquem separados, é igual a:

a) 3.260

b) 3.840

c) 2.896

d) 1.986

e) 1.842

Questão 29 (CESPE/ANAC/2009/ESPECIALISTA EM REGULAÇÃO/ECONOMIA) Considere que, em uma empresa, seja utilizado sistema de códigos com apenas dois tipos de símbolos (1 e 2), sendo cada código formado por uma sequência desses símbolos, cuja ordem é igual à soma dos algarismos que formam o código, a exemplo dos códigos distintos 1, 11, 12 e 121, que são de ordem 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Considere, ainda, que s(0) = 1 e que s(n) é igual ao número de códigos distintos de ordem n, n>1,

Existem, no máximo, 55 códigos distintos de ordem menor ou igual a 10.

Questão 30 (ESAF/AFRFB/2009) De quantas maneiras podem sentar-se três homens e três mulheres em uma mesa redonda, isto é, sem cabeceira, de modo a se ter sempre um homem entre duas mulheres e uma mulher entre dois homens?

a) 72

b) 36

c) 216

d) 820

e) 360

Questão 31 (ITA/2015) Dispomos de seis cores diferentes. Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras isto pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica à outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo?

a) 40

b) 36

c) 35

d) 32

e) 30

(CESPE/TRF-1ª REGIÃO/2017) Em uma reunião de colegiado, após a aprovação de uma matéria polêmica pelo placar de 6 votos a favor e 5 contra, um dos 11 presentes fez a seguinte afirmação: "Basta um de nós mudar de ideia e a decisão será totalmente modificada."

Considerando a situação apresentada e a proposição correspondente à afirmação feita, julgue o próximo item.

Questão 32 A quantidade de maneiras distintas de se formar o placar de 6 votos a favor e 5 contra, na decisão do assunto polêmico pelos presentes no referido colegiado, é inferior a 500.

Questão 33 (CESPE/ANVISA/2016/TÉCNICO ADMINISTRATIVO) Situação hipotética: A ANVISA, com objetivo de realizar a regulação de um novo medicamento, efetua as análises laboratoriais necessárias. Essas análises são assistidas por um grupo de 4 dos seus 8 técnicos farmacêuticos. Desses técnicos, 3 possuem cargo de chefia de equipe e por isso não trabalham juntos. Assertiva: Nessa situação, considerando que em cada uma das equipes participa sempre apenas um dos três técnicos farmacêuticos chefes, então a quantidade de equipes distintas com 4 técnicos farmacêuticos que poderão ser formadas é inferior a 25.

Questão 34 (CESPE/MPOG/2015/ANALISTA EM TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO) Determinado órgão público é composto por uma diretoria-geral e quatro secretarias; cada secretaria é formada por três diretorias; cada diretoria tem quatro coordenações; cada coordenação é constituída por cinco divisões, com um chefe e sete funcionários subalternos em cada divisão.

A respeito desse órgão público, julgue o item seguinte, sabendo que cada executivo e cada funcionário subalterno só pode ocupar um cargo nesse órgão.

Se, entre onze servidores previamente selecionados, forem escolhidos: sete para compor determinada divisão, um para chefiar essa divisão, um para a chefia da coordenação correspondente, um para a diretoria e um para a secretaria, haverá menos de 8.000 maneiras distintas de se fazer essas escolhas.

Questão 35 (CESPE/FUB/2015) Com as cinquenta e duas cartas de um baralho, é possível formar mais de 2.500.000 jogos distintos de 5 cartas.

Questão 36 (CESPE/POLÍCIA FEDERAL/2014/AGENTE DA POLÍCIA FEDERAL) Um batalhão é composto por 20 policiais: 12 do sexo masculino e 8 do sexo feminino. A região atendida pelo batalhão é composta por 10 quadras e, em cada dia da semana, uma dupla de policiais policia cada uma das quadras.

Com referência a essa situação, julgue o item subsequente.

Se a escala dos policiais for feita de modo a diversificar as duplas que policiam as quadras, então, se determinada dupla policiar a quadra X em determinado dia, essa mesma dupla voltará a policiar a quadra X somente mais de seis meses após aquele dia.

QUESTÃO 37 (CESPE/TC-DF/2014/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA) Considerando que, em um planejamento de ações de auditoria, a direção de um órgão de controle tenha mapeado a existência de 30 programas de governo passíveis de análise, e sabendo que esse órgão dispõe de 15 servidores para a montagem das equipes de análise e que cada equipe deverá ser composta por um coordenador, um relator e um técnico, julgue os próximos itens.

A quantidade de maneiras distintas de serem escolhidos 3 dos referidos servidores para a montagem de uma equipe de análise é superior a 2.500.

QUESTÃO 38 (CESPE/TC-DF/2014/TÉCNICO DE ADMINISTRAÇÃO PÚBLICA) Considerando que, em um planejamento de ações de auditoria, a direção de um órgão de controle tenha mapeado a existência de 30 programas de governo passíveis de análise, e sabendo que esse órgão dispõe de 15 servidores para a montagem das equipes de análise e que cada equipe deverá ser composta por um coordenador, um relator e um técnico, julgue os próximos itens.

A quantidade de maneiras distintas de se escolherem 3 desses programas para serem acompanhados pelo órgão é inferior a 4.000.

QUESTÃO 39 (CESPE/SAEB-BA/2011) O número total de partidas em um campeonato de pingue-pongue com 20 participantes em que cada competidor jogue uma única vez com cada um dos demais é igual a:

a) 400

b) 380

c) 200

d) 190

(CESPE/TJ-SE/2014/TÉCNICO JUDICIÁRIO) Um grupo de 15 turistas que planeja passear pelo rio São Francisco, no Canyon do Xingó, em Sergipe, utilizará, para o passeio, três barcos: um amarelo, um vermelho e um azul. Cada barco tem capacidade máxima para 8 ocupantes e nenhum deles deixará o porto com menos de 3 ocupantes.

Com base nessa situação hipotética, julgue os itens seguintes.

Questão 40 A quantidade de maneiras distintas de escolher 8 turistas para ocupar o barco azul e 7 para ocupar o barco amarelo é inferior a $8^2 \times 7^2$.

Questão 41 A quantidade de maneiras distintas de distribuir os 15 turistas pelos 3 barcos, de forma que cada barco seja ocupado por exatamente 5 turistas, é superior a $2^2 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^2$.

Questão 42 (CESPE/MEC/2014) A análise de requerimentos de certificação de entidades educacionais, no âmbito do Ministério da Educação, será realizada por uma equipe formada por, no mínimo, um analista contábil, um analista educacional e um analista processual. Considerando essa situação hipotética, julgue os itens subsecutivos.

A partir de cinco analistas contábeis, sete analistas educacionais e seis analistas processuais, a quantidade de maneiras distintas de se formar equipes com exatamente três analistas de cada especialidade em cada equipe é superior a 5.000.

Questão 43 (CESPE/BANCO DO BRASIL/2008/ESCRITURÁRIO) Caso as senhas de acesso dos clientes aos caixas eletrônicos de certa instituição bancária contenham

3 letras das 26 do alfabeto, admitindo-se repetição, nesse caso, a quantidade dessas senhas que têm letras repetidas é superior a 2×10^3.

Questão 44 (FCC/TST/2017/TÉCNICO JUDICIÁRIO/ÁREA ADMINISTRATIVA) O código de um sistema de classificação de processos é composto por três vogais juntas, seguidas por três algarismos. A ordenação começa com o 1º processo, cujo código é AAA000, e termina com o 125.000º processo, cujo código é UUU999, seguindo sempre a ordem alfabética das letras e ordem crescente do número composto pelos três algarismos. Nesse sistema de classificação, o 10.500º processo terá o código:

a) AEA501.
b) AIA499.
c) AIA501.
d) AIA500.
e) EAA499.

Questão 45 (FCC/SEGEP-MA/2016/AUDITOR-FISCAL DA RECEITA ESTADUAL) Jair tem 8 primos, dos quais irá convidar 5 para um jantar em sua casa. Ocorre que 2 dos 8 primos só podem ir ao jantar se forem juntos. O total de escolhas diferentes dos 5 convidados que Jair pode fazer para o jantar é igual a

a) 40.
b) 56.
c) 30.
d) 26.
e) 36.

Questão 46 (FCC/DPE-SP/2015/ANALISTA DE SISTEMAS) Para formar uma senha de quatro letras é permitido o uso de uma letra A, uma letra B, duas letras C e três letras D. Dentre todas as senhas possíveis nesse sistema, o número daquelas que tem exatamente três letras diferentes supera o número das demais em

a) 28.

b) 24.

c) 42.

d) 36.

e) 30.

Questão 47 (FGV/SENADO FEDERAL/2008/ANALISTA LEGISLATIVO) Em uma reunião todas as pessoas se cumprimentaram, havendo ao todo 120 apertos de mão. O número de pessoas presentes nessa reunião foi:

a) 14

b) 15

c) 16

d) 18

e) 20

Questão 48 (ESAF/AFRFB/2009) Sabe-se que os pontos A,B,C, D, E, F e G são coplanares, ou seja, estão localizados no mesmo plano. Sabe-se, também, que destes sete pontos, quatro são colineares, ou seja, estão numa mesma reta. Assim, o número de retas que ficam determinadas por estes sete pontos é igual a:

a) 16

b) 28

c) 15

d) 24

e) 32

Questão 49 (ESAF/AFRFB/2014) Um polígono regular possui 48 diagonais que não passam pelo seu centro. A partir desta informação, pode-se concluir que o número de lados desse polígono é igual a:

a) 12
b) 36
c) 24
d) 48
e) 22

Questão 50 (CESPE/FUB/2015/CONHECIMENTOS BÁSICOS/QUESTÃO MUITO TRAQUINA) (♥) copas, espadas (♠), ouros (♦) e paus (♣), viradas para baixo.As cartas do baralho, em ordem crescente de importância, são 2, 3,4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Q (dama), J (valete), K (rei) e A (ás). Nesse jogo, cada jogador recebe cinco cartas e pode descartar algumas ou todas e receber outras novas, na mesma quantidade, de modo a ficar sempre com cinco cartas na mão. O jogador com o melhor jogo, isto é, com a sequência de cinco cartas que vale mais pontos, ganha a rodada. As sequências de jogos vencedoras no pôquer fechado, em ordem crescente de importância, são:

- par – formado por duas cartas de mesmo valor e três outras sem relação (por exemplo: [Q ♣] [Q ♠] [2 ♥] [4 ♥] [5♣]);
- dois pares – formado por duas cartas de mesmo valor, mais outras duas também de mesmo valor (mas de valor diferente do primeiro par) e uma carta não relacionada com as dos pares (por exemplo: [3♥] [3♦] [10♠] [10♥] [A♠]);
- trinca – formado por três cartas de mesmo valor e outras duas sem relação (por exemplo: [J♠] [J♦] [J♥] [6♥] [7♥]);
- straight (sequência) – formado por cinco cartas em sequência de naipes diferentes (por exemplo: [5 ♣] [6 ♠] [7 ♥] [8 ♥] [9 ♣]);

- flush – formado por cinco cartas do mesmo naipe (por exemplo: [4 ♣] [5 ♣] [10 ♣] [Q ♣] [J ♣]);
- full house – formado por um par e uma trinca (por exemplo: [Q ♣] [Q♠] [A♥] [A♠] [A♦]);
- quadra – formado por quatro cartas do mesmo valor e uma carta qualquer (por exemplo: [10♣] [10♠] [10♥] [10 ♦] [3♠]);
- straight flush – formado por cinco cartas em sequência e do mesmo naipe (por exemplo: [7♥] [8♥] [9♥] [10♥] [Q♥]);
- royal straight flush – formado pela sequência máxima, isto é, dez, dama, valete, rei e ás, todas do mesmo naipe (por exemplo: [10 ♠] [Q ♠] [J ♠] [K ♠] [A ♠]).

Com base nessas informações, julgue os seguintes itens, a respeito do jogo de pôquer fechado.

A quantidade de pares simples, e nenhum jogo melhor, que podem ser formados é igual a $6 \times 44 \times C_{13,9}$.

QUESTÃO 51 (FGV/IBGE/2016/TECNOLOGIA/ESTATÍSTICO) A teoria das probabilidades está apoiada em um conjunto de três axiomas, atribuídos a Kolmogorov. Sendo S o espaço amostral, A e B dois eventos, Ø do vazio e P(.) a medida de probabilidade, os axiomas estabelecem que:

a) $P(S) = 1$, $P(A) \geq 0$ e $P(A \cap B) = P(A).P(B)$;

b) $P(\varnothing) = 0$, $P(A) \leq 1$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

c) $P(A) \geq 0$; $P(A) = 1 - P(A^C)$ e $P(S) = 1$, A^C = Complementar de A;

d) $P(A) \geq 0$; $P(S) = 1$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ com $A \cap B = \varnothing$;

e) $P(A) \leq 1$; $P(S) = 1$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

QUESTÃO 52 (FGV/TJ-BA/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICO) Na teoria das probabilidades, os conceitos de eventos independentes e eventos mutuamente exclusivos, apesar de distintos, guardam entre si uma estreita relação. Quando dois eventos são independentes:

a) são também mutuamente exclusivos;

b) não podem ser mutuamente exclusivos;

c) podem não ser mutuamente exclusivos, mas sua interseção deve ter probabilidade nula de ocorrência;

d) serão também mutuamente exclusivos se as probabilidades condicionais, de cada um dado o outro, forem idênticas;

e) os complementares devem ser mutuamente exclusivos.

QUESTÃO 53 (CESPE/BRB/2010/ESCRITURÁRIO) A senha de um cartão de crédito possui quatro dígitos, que são algarismos entre 0 e 9, e a administradora desse cartão veda senhas em que todos os quatro algarismos sejam iguais, ou que os algarismos correspondam ao dia e mês de aniversário do titular do cartão. Por exemplo, se um indivíduo nasceu no dia 4 de março, a senha de seu cartão não pode ser 0403. É possível que diferentes cartões de crédito tenham a mesma senha.

A senha é solicitada sempre que o titular realizar algum pagamento; se o portador do cartão errar ao informar a senha por três vezes consecutivas, o cartão é bloqueado imediatamente.

Com base no texto acima, julgue os itens a seguir.

Se um indivíduo nasceu no primeiro semestre do ano, então um número de quatro dígitos, escolhido aleatoriamente, tem mais de 99,9% de chance de ser uma senha possível para ele.

Questão 54 (FGV/TJ-BA/2015/ANALISTA JUDICIÁRIO/ESTATÍSTICA) Considere um jogo que consiste no lançamento de um dado, honesto, uma ou duas vezes. O objeto só será utilizado pela segunda vez se o resultado do primeiro lançamento for um número ímpar. Assim sendo, a probabilidade de que o total de pontos obtidos seja igual a seis é:

a) 1/12
b) 1/18
c) 7/12
d) 5/18
e) 1/4

Questão 55 (FGV/2016/IBGE/ANALISTA) Suponha que, de um baralho normal, contendo 52 cartas de quatro naipes, é extraído, sem reposição e aleatoriamente, um total de quatro cartas. Se a carta "Ás" é equivalente a uma figura (ou seja, são 4 figuras e 9 números de cada naipe), é correto afirmar que a probabilidade de que todas sejam:

a) Do mesmo naipe é igual a $\left(\frac{13}{52}\right)\left(\frac{12}{51}\right)\left(\frac{11}{50}\right)\left(\frac{10}{49}\right)$
b) Figuras é igual a $\left(\frac{10}{52}\right)\left(\frac{9}{51}\right)\left(\frac{8}{50}\right)\left(\frac{7}{49}\right)$
c) Do mesmo número é igual a $\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{3}{51}\right)\left(\frac{2}{50}\right)\left(\frac{1}{49}\right)$
d) Números é igual a $\left(\frac{36}{52}\right)\left(\frac{35}{51}\right)\left(\frac{34}{50}\right)\left(\frac{33}{49}\right)$
e) De naipes diferentes é igual a $4.\left(\frac{16}{52}\right)\left(\frac{12}{51}\right)\left(\frac{8}{50}\right)\left(\frac{4}{49}\right)$

Questão 56 (CESPE/SERES-PE/2017/AGENTE DE SEGURANÇA PENITENCIÁRIA/ADAPTADA) De uma urna que continha 20 bolas idênticas, identificadas por números de 1 a 20, foi extraída aleatoriamente uma bola. Esse evento define o espaço amostral Ù = {1, 2, 3,..., 20}.

Considere os seguintes eventos:

A = {a bola retirada da urna é identificada por um número múltiplo de 4};

B = {a bola retirada da urna é identificada por um número múltiplo de 5}.

A probabilidade do evento

Questão 57 (FGV/SEFAZ-RJ/2010/AGENTE FISCAL DE RENDAS) Se A e B são eventos independentes com probabilidades P[A] = 0,4 e P[B] = 0,5 então P[A ☐ B] é igual a:

a) 0,2

b) 0,4

c) 0,5

d) 0,7

e) 0,9

Questão 58 (FGV/SEFAZ-RJ/2008/AGENTE FISCAL DE RENDAS) Sejam A, B e C três eventos quaisquer definidos em um espaço amostral S. Então, $P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)$ refere-se à probabilidade de ocorrência de:

a) Um ou dois eventos

b) Exatamente um dos eventos

c) Pelo menos um dos eventos

d) No máximo um dos eventos

e) Pelo menos dois eventos

Questão 59 (FGV/SEFIN-RO/2018/AUDITOR-FISCAL) Dois eventos A e B têm probabilidades iguais a 70% e 80%. Os valores mínimo e máximo da probabilidade da intersecção de A e B são:

a) 20% e 50%

b) 20% e 70%

c) 50% e 70%

d) 0% e 70%

e) 30% e 50%

GABARITO

1. 36
2. c
3. e
4. b
5. b
6. d
7. d
8. e
9. e
10. e
11. C
12. E
13. c
14. 168
15. d
16. E
17. e
18. e
19. b
20. b
21. c
22. c
23. d
24. c
25. e
26. C
27. b
28. b
29. E
30. Anulada
31. e
32. C
33. E
34. C
35. C
36. C
37. C
38. E
39. d
40. E
41. C
42. C
43. E
44. b
45. d
46. e
47. c
48. a
49. a
50. C
51. d
52. b
53. E
54. e
55. d
56. E
57. d
58. a
59. c

ANOTAÇÕES

ANOTAÇÕES


LEI Nº 8.666/1993 - LICITAÇÃO
Avaliação
Comentário
Seu feedback é valioso. Você gostaria de deixar um comentário e assim nos ajudar a melhorar nossos produtos e serviços?
Obs: A avaliação da aula em pdf é exclusivamente pedagógica. Clique aqui para relatar problemas técnicos, pois serão desconsiderados deste canal.
Sim, salvar comentário.
Não, obrigado.
NÃO SE ESQUEÇA DE AVALIAR ESTA AULA!
SUA OPINIÃO É MUITO IMPORTANTE PARA MELHORARMOS AINDA MAIS NOSSOS MATERIAIS.
ESPERAMOS QUE TENHA GOSTADO DESTA AULA!
PARA AVALIAR, BASTA CLICAR EM LER A AULA E, DEPOIS, EM AVALIAR AULA.
AVALIAR