



ÁREA 1 - FACULDADE DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Cursos de Engenharia

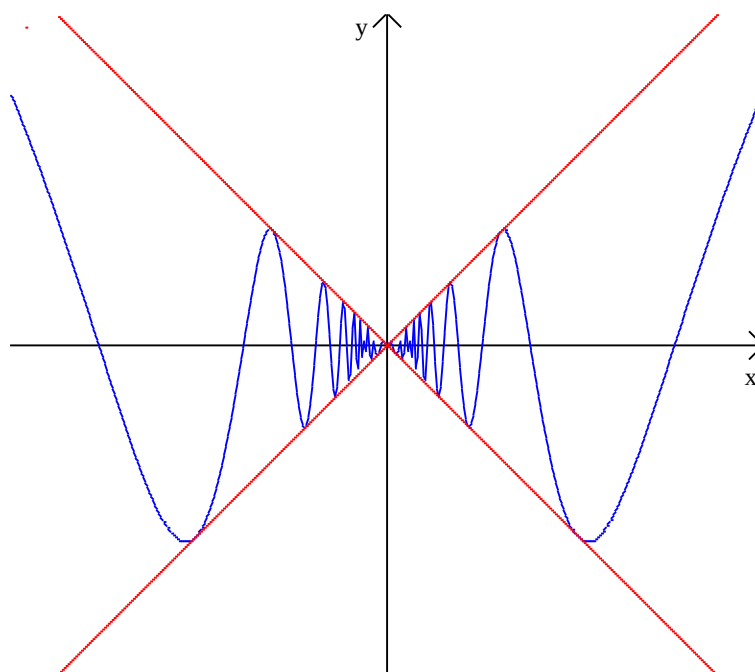
Disciplina: Cálculo Instrumental

Professor(a): _____ Data: ____ / ____ / ____

Aluno(a): _____

1ª Lista de Exercícios

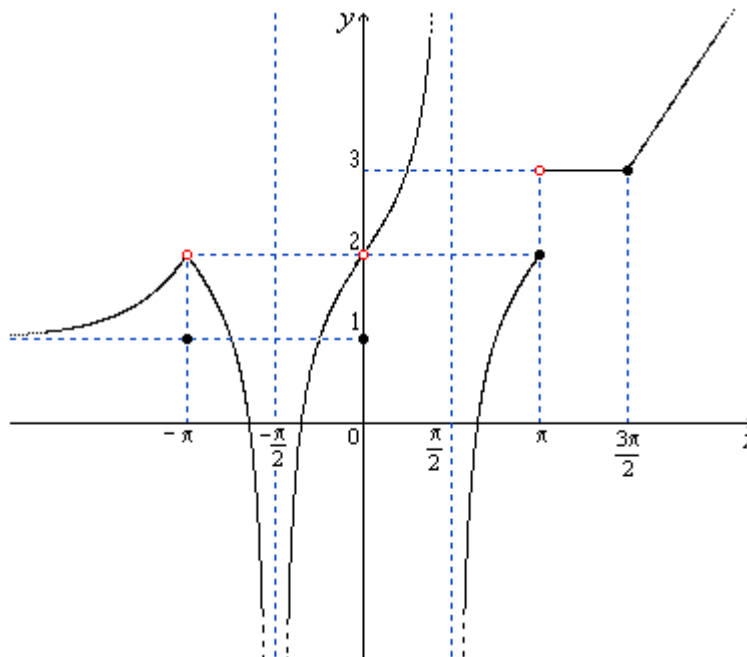
Limites



$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

O conceito de **Limite** é o pilar do Cálculo Diferencial e Integral desenvolvido por **Isaac Newton**(1642-1727) e **Gottfried Wilhelm Leibniz**(1646-1716).

Questão 1. Considere o gráfico da função f abaixo definida no domínio $\mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.



Analisando o gráfico de f , responda, **justificando**:

- | | | | | |
|---|--|--|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | (f) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$ | (k) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} f(x)$ | (p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ | (u) f é contínua em $x_0 = 0$? |
| (b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x)$ | (g) $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ | (l) $\lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x)$ | (q) $f(-\pi)$ | (v) f é contínua em $x_0 = -\pi$? |
| (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ | (h) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x)$ | (m) $\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x)$ | (r) $f(0)$ | (w) f é contínua em $x_0 = 3\pi/2$? |
| (d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ | (i) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} f(x)$ | (n) $\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x)$ | (s) $f(\pi)$ | (x) f é contínua em $x_0 = \pi$? |
| (e) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$ | (j) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x)$ | (o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | (t) $f(3\pi/2)$ | (y) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x)$ |

Questão 2. Esboce o gráfico das funções abaixo e determine $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e, caso exista, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$:

Obs.: Use o **Winplot** para visualizar os gráficos.

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x+1, & x > 1 \end{cases} \quad (a=1)$ | (b) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 2^{-x}, & x > 0 \end{cases} \quad (a=0)$ |
| (c) $f(x) = \begin{cases} 4x+12, & x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2+3, & x > 1 \end{cases} \quad (a=-2)$ | (d) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \\ x^2-1, & x > 1 \\ 2-x, & x = 1 \end{cases} \quad (a=1)$ |

(e) $f(x) = \begin{cases} (1/2)^x, & x \geq 0 \\ 1/x, & x < 0 \end{cases} \quad (a = 0)$

(f) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ \cos x, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad (a = \pi)$

Questão 3. Considere as funções do exercício 2. Verifique se f é contínua em $x = a$. Justifique a sua resposta.

Questão 4. Esboce o gráfico da função $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } x < -2 \\ x^2, & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{se } 1 < x \end{cases}$ e determine:

(a) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

(g) $f(-2)$

(j) f é contínua em $x_0 = -2$?

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(h) $f(0)$

(k) f é contínua em $x_0 = 0$?

(c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

(i) $f(1)$

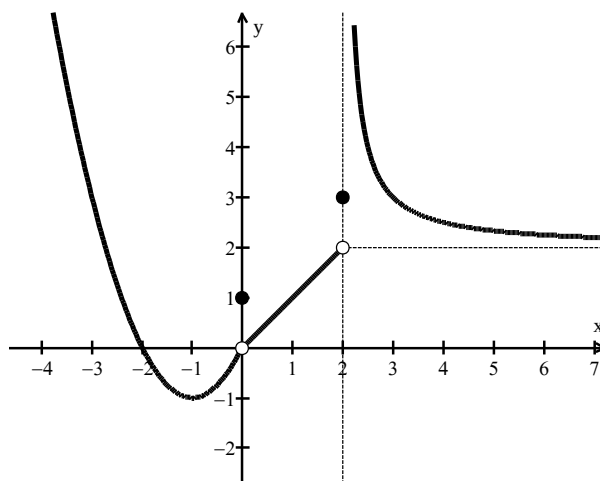
(l) f é contínua em $x_0 = 1$?

Questão 5. Considere a função $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 1; & \text{se } x < -3 \\ -3n; & \text{se } x = -3 \\ 3x - 3; & \text{se } x > -3 \end{cases}$. Encontre as constantes m e n de modo que:

(a) Exista $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

(b) f seja contínua em $x = -3$

Questão 6. Com relação à função f , cujo gráfico é dado abaixo, pode-se afirmar que:



a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, mas f não é contínua em 0. Além disso, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$.

b) Não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$.

c) A função f é contínua em 0 e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

d) Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, mas f não é contínua em 0. Além disso, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

e) A função não é contínua em 2 e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Questão 7. Determine, se possível, as constantes a e b, de modo que f seja contínua em x_0 , sendo:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 3ax^2 + 2, & x < 1 \\ x - 2, & x \geq 1 \end{cases} \quad (x_0 = 1)$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} bx^2 + 2, & x \neq 1 \\ b^2, & x = 1 \end{cases} \quad (x_0 = 1)$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 3x - 3, & x > -3 \\ ax, & x = -3 \\ x^2 + 1, & x < -3 \end{cases} \quad (x_0 = -3)$$

$$(d) f(x) = \begin{cases} 2a \cdot \cos(\pi + x) + 1, & x < 0 \\ 7x - 3a, & x = 0 \\ b - 2x^2, & x > 0 \end{cases} \quad (x_0 = 0)$$

Questão 8. Calcule os seguintes limites (do tipo 0/0 envolvendo fatorações):

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{3x^2 - 4x - 4}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{8x^3 - 1}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4 + x)^2 - 16}{x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 27}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 2} \log_6 \left(\frac{3x^3 - 24}{x - 2} \right)$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{\frac{x^2 - 4}{3x^2 + 4x - 4}}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 2} \sin \left[\pi (x^3 - 8) \cdot (x - 2)^{-1} \right]$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 2} 2^{(x^4 - 16)(x^3 - 8)^{-1}}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^3 - 250}{x^2 - 6x + 5}$$

Questão 9. Calcule os seguintes limites (do tipo 0/0 envolvendo conjugado de radicais):

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{3x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^2}{x + \sqrt{2+x}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3}}{x^3 - 1}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{5-x}}{\sqrt{x} - 2}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 4}{2x - 32}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3x} - 3}{4x - 12}$$

Questão 10. Calcule os seguintes limites (do tipo k/0, onde k é constante e $k \neq 0$):

$$(a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 5}{(x - 4)^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x \cdot \sin(x)}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 + 3}{(x - 5)^2}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 5}{x^2 - 5x + 4}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - 11}{x - 3}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - x}{(x - 2)^3}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{\sin x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x - 4}{x^2 - 4}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x}{|x|}$$

Questão 11. Calcule os limites a seguir (do tipo ∞/∞):

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 4x - 25}{18x^3 - 9x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-3)(2x+5)}{(x-1)(3x+4)(2-x)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 - 3x - 4}{x^4 + 1}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{(x-1)(3-2x)^{-1}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^5 - x + 1}{4x^3 - 2x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1/\pi)^{x^3 \cdot (x^2-1)^{-1}}$

(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2}$ (***)

(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$ (***)

(***)Sugestão:

- A soma dos n primeiros números naturais é conhecida pela fórmula $n(n+1)/2$.
- A soma dos quadrados dos n primeiros números naturais é conhecida pela fórmula $n(n+1)(2n+1)/6$.

Questão 12. Calcule os limites a seguir (do tipo $+\infty - \infty$):

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (6 + x^3 - x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$

Aplicações

Questão 13. O departamento de capacitação de novos funcionários da empresa **C&V Confecções** estima-se que um novo funcionário com pouca experiência na confecção da sua linha de produção produzirá

$Q(t) = 30 - 10e^{-\frac{t}{9}}$ novas unidades em t dias após receber treinamento. Pergunta-se

- (a) Qual a produção do funcionário quando terminar o treinamento?
 (b) O que acontece com o nível de produção a longo prazo ?

Questão 14. Uma determinada notícia numa cidade foi propagada de tal maneira que o número de pessoas que tomaram conhecimento é dado por $N(t) = \frac{600}{1 + 24e^{-0,5t}}$, onde t representa o número de dias após ocorrer a notícia. Pergunta-se

- (a) Quantas pessoas souberam a notícia de imediato?
 (b) Determine $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ e explique o seu resultado.

Questão 15. A arrecadação mundial total pela exibição de um filme de grande sucesso de bilheteira é aproximado pela função $A(x) = \frac{120x^2}{x^2 + 4}$, onde $T(x)$ é medido em milhões de dólares e x é o número de meses do filme em cartaz. Pergunta-se:

- (a) Qual é a arrecadação de bilheteria após o primeiro e o segundo mês?
 (b) Qual será a arrecadação do filme ao longo do prazo?

Questão 16. Se uma esfera oca de raio $a = 2\text{cm}$ é carregada com unidade de eletricidade estática, a intensidade de campo elétrico E no ponto P depende da distância x do centro da esfera até P pela seguinte lei:

$$E(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < a \\ \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \geq a \end{cases}.$$

Estude a continuidade do campo na superfície da esfera.

Derivada

Questão 17. Usando a **definição de derivada**, verifique se as funções a seguir são deriváveis em x_0 e, em caso afirmativo, determine $g'(x_0)$:

(a) $g(x) = 3x + 5 \quad (x_0 = 2)$

(b) $g(x) = x^2 + 3 \quad (x_0 = 4)$

(c) $g(x) = x^2|x| \quad (x_0 = 0)$

(d) $g(x) = \begin{cases} -3x, & x \leq 2 \\ x - 8, & x > 2 \end{cases} \quad (x_0 = 2)$

Questão 18. Seja $f(x) = x^{-2}$, $x \neq 0$. Usando a **definição**, mostre que $f'(x_0) = -2x_0^{-3}$, onde $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Questão 19. Determine as constantes a e b em cada caso:

(a) $f(x) = ax^2 + x + 1$, sendo $f'(1) = -9$.

(b) $f(x) = x^2 + ax + b$, sendo $f(1) = 8$ e $f'(2) = 4$.

Questão 20. Usando as regras operacionais, determine as derivadas das funções a seguir:

(a) $y = 2x^4 - 3x^2 + x - 3$

(b) $y = -5x^6 + 3x^4 - 2x + 2$

(c) $y = \frac{3}{4x} + 2x\left(\sqrt[3]{x^2}\right) + \frac{3}{\sqrt{x}}$

(d) $y = x^{2/3}(2x^{1/3} - 1)$

(e) $y = (3x^2 + 6) \left(2x - \frac{1}{4}\right)$

(f) $y = \frac{2x + 4}{3x - 1}$

(g) $y = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$

Questão 21. Determine $f'(1)$, sabendo que $f(x) = \left(\frac{3x+2}{x}\right)(x^{-5} + 2)$.

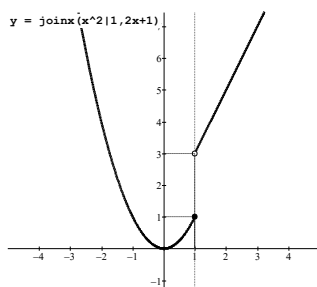
Respostas

Questão 1.

- | | | | | |
|----------------|----------------|-------|---------------|------------------------------|
| (a) 2 | (f) 2 | (k) 3 | (p) $+\infty$ | (u) não, pois (a) $\neq$ (r) |
| (b) $-\infty$ | (g) não existe | (l) 2 | (q) 1 | (v) não, pois (n) $\neq$ (q) |
| (c) $+\infty$ | (h) $-\infty$ | (m) 2 | (r) 1 | (w) sim, pois (k) = (t) |
| (d) não existe | (i) 3 | (n) 2 | (s) 2 | (x) não por (g) |
| (e) 3 | (j) 3 | (o) 1 | (t) 3 | (y) $-\infty$ |

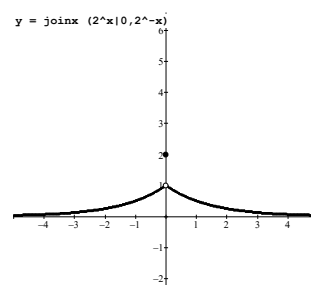
Questão 2.

(a)



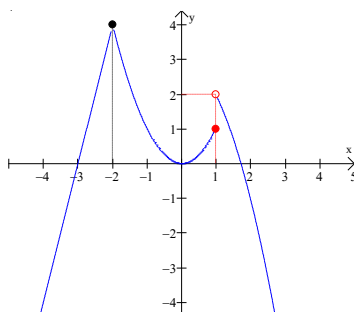
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \quad \text{não existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

(b)



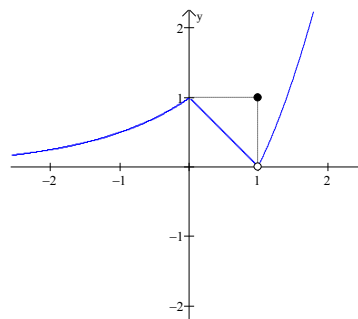
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

(c)



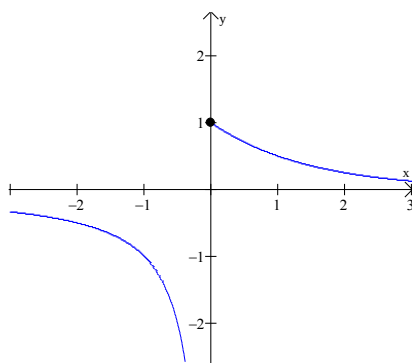
$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 4$$

(d)



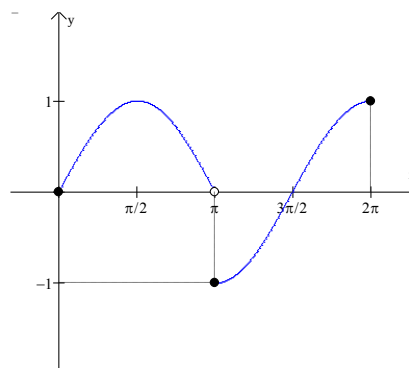
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

(e)



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \text{não existe } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

(f)

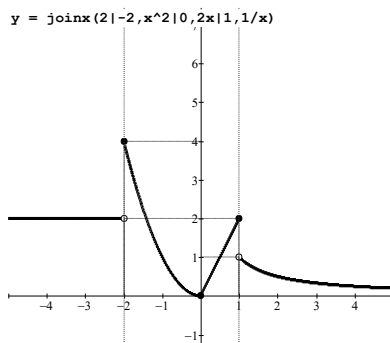


$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = -1, \quad \text{não existe } \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$$

Questão 3.

- (a) Não é contínua em 1, pois não existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- (b) Não é contínua em 0, pois $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$.
- (c) É contínua em -2, pois $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = 4$.
- (d) Não é contínua em 1, pois $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$.
- (e) Não é contínua em 0, pois não existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- (f) Não é contínua em π pois não existe $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$.

Questão 4.



- | | | | |
|-------|-------|-------|-------------------------------|
| (a) 2 | (d) 4 | (g) 4 | (j) não, pois (a) $\neq$ (d) |
| (b) 0 | (e) 0 | (h) 0 | (k) sim, pois (b) = (e) = (h) |
| (c) 2 | (f) 1 | (i) 2 | (l) não, pois (c) $\neq$ (f) |

Questão 5.

- (a) $m = \frac{-13}{9}$ e n é qualquer real
- (b) $m = \frac{-13}{9}$ e n = 4

Questão 6. D

Questão 7.

- (a) a = -1
- (b) b = -1 ou b = 2
- (c) Não é possível pois $\forall a \in \mathbb{R}$, o limite $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ não existe.
- (d) a = -1, b = 3

Questão 8.

- | | | | | | |
|----------|-------|------------------|---------|---------------|----------|
| (a) 2 | (b) 1 | (c) 0 | (d) 5/6 | (e) 8 | (f) 5/3 |
| (g) 2/27 | (h) 2 | (i) $\sqrt{2}/2$ | (j) 0 | (k) $2^{8/3}$ | (l) 75/2 |

Questão 9.

- | | | | | | |
|-------------------|----------|---------|---------------------------|----------|-------|
| (a) $\frac{1}{2}$ | (b) 1/3 | (c) 4/3 | (d) $\frac{1}{6\sqrt{3}}$ | (e) -1/3 | (f) 0 |
| (g) 4 | (h) 1/16 | (i) 1/8 | | | |

Questão 10.

- (a) $-\infty$ (b) $+\infty$ (c) $+\infty$
- (d) Não existe, pois $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+5}{x^2-5x+4} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+5}{x^2-5x+4} = -\infty$.
- (e) Não existe, pois $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x-11}{x-3} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x-11}{x-3} = -\infty$.
- (f) Não existe, pois $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3-x}{(x-2)^3} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3-x}{(x-2)^3} = +\infty$.
- (g) Não existe, pois $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2+1}{\sin x} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+1}{\sin x} = +\infty$.
- (h) Não existe, pois $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x-4}{x^2-4} = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-4}{x^2-4} = +\infty$.
- (i) $+\infty$

Questão 11.

- (a) 0 (b) $-2/3$ (c) 0 (d) $2^{-0,5}$ (e) $-\infty$ (f) 0
- (g) $1/2$ (h) $1/3$

Questão 12.

- (a) $-\infty$ (b) 0 (c) 0 (d) 2

Questão 13.

- (a) 20 unidades (b) se aproxima de 30 unidades

Questão 14.

- (a) 24 unidades (b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 600$;

Questão 15.

- (a) 24 e 60 milhões (b) 120 milhões; a arrecadação fica próxima desse valor.

Questão 16.

É descontínuo, pois $\lim_{x \rightarrow 2} E(x) \neq E(2)$.

Questão 17.

- (a) 3 (b) 8 (c) 0 (d) não existe (derivadas laterais distintas)

Questão 19.

- (a) $a = -5$ (b) $a = 0$ e $b = 7$

Questão 20.

- (a) $y' = 8x^3 - 6x + 1$ (b) $y' = -30x^5 + 12x^3 - 2$ (c) $y' = -\frac{3}{4x^2} + \frac{10}{3} \left(\sqrt[3]{x^2} \right) - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$
- (d) $y' = 2 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ (e) $y' = 18x^2 - \frac{3}{2}x + 12$ (f) $y' = -\frac{14}{(3x-1)^2}$ (g) $y' = \frac{-48x}{(x^2-16)^2}$

Questão 21. -31