

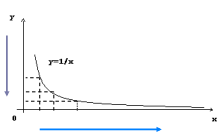
Cálculo 1

1.4- Limites Tendendo ao Infinito

Cálculo 1 - Limites

- **Limite de $f(x)$ quando x tende a “mais infinito”**
 Considere, por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x}$
- Perceba que, quando x tende a $+\infty$, isto é, quando x cresce indefinidamente, os valores a função $f(x)$ tendem a se aproximar cada vez mais de 0.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$



Cálculo 1 - Limites

- Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, não representam números reais, não podendo ser aplicadas a eles, portanto, as técnicas usuais de cálculo algébrico.
- Dado $b \in \mathbb{R}$, teremos as seguintes igualdades simbólicas:
 - $b + (+\infty) = +\infty$
 - $b + (-\infty) = -\infty$
 - $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
 - $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
 - $(+\infty) + (-\infty)$ = nada se pode afirmar inicialmente. O símbolo $\infty - \infty$, é dito um símbolo de indeterminação.
 - $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
 - $(+\infty) \cdot 0$ = nada se pode afirmar inicialmente. É uma indeterminação.
 - ∞ / ∞ = nada se pode afirmar inicialmente. É uma indeterminação.

Cálculo 1 - Limites

■ No cálculo de limites de funções, é muito comum chegarmos a expressões indeterminadas, o que significa que, para encontrarmos o valor do limite, teremos que levantar a indeterminação, usando as técnicas algébricas. Os principais símbolos de indeterminação, são:

$$\infty - \infty$$

$$\infty \cdot 0$$

$$\infty / \infty$$

$$\infty^0$$

$$0 \div 0$$

$$1^\infty$$

$$1^{-\infty}$$

Cálculo 1 - Limites

■ Exemplo:

Calcule o limite, se existir, de:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{4x+1}$$

Não basta apenas substituir “x” por “ ∞ ”, pois ao fazer isto, teria uma indeterminação do tipo

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Cálculo 1 - Limites

Portanto, o **método** aqui consiste em dividir o numerador e o denominador por x:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{4x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3 - \frac{1}{x})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 + \frac{1}{x})} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 + \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{1}{x})} = \frac{3-0}{4+0} = \frac{3}{4}$$

■ Para calcular o limite de f(x) quando x tende a menos infinito, o raciocínio é análogo.

Exemplo 2 – Usando o Teorema 7

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \quad \begin{array}{l} \text{Regra da Soma} \\ \text{Limites Conhecidos} \end{array}$$

$$= 5 + 0 = 5$$

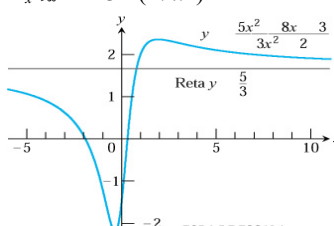
$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \quad \begin{array}{l} \text{Regra do Produto} \\ \text{Limites Conhecidos} \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi\sqrt{3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$

$$= \pi\sqrt{3} \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Exemplo 3 – Numerador e Denominador de Mesmo GrauDivida o numerador e o denominador por x^2 .

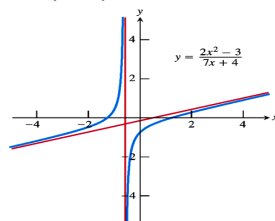
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 8x - 3}{3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + (8/x) - (3/x^2)}{3 + (2/x^2)}$$

$$= \frac{5 + 0 - 0}{3 + 0} = \frac{5}{3}$$


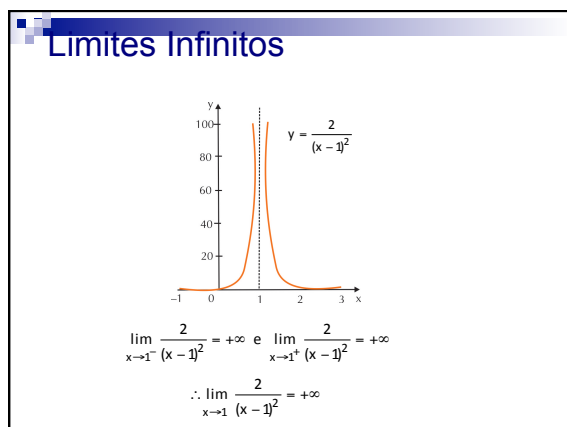
Exemplo 5 – Grau do Numerador Maior que o Grau do Denominador

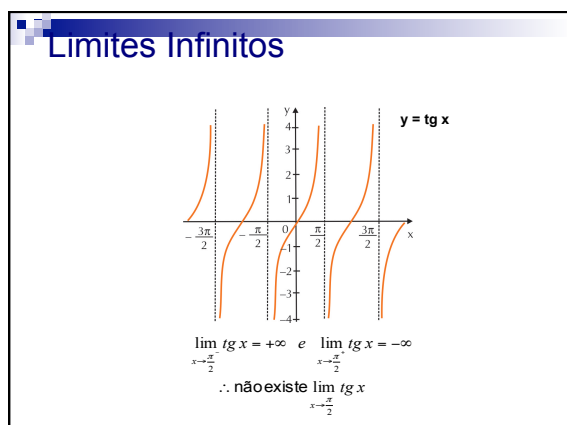
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3}{7x + 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (3/x)}{7 + (4/x)}$$

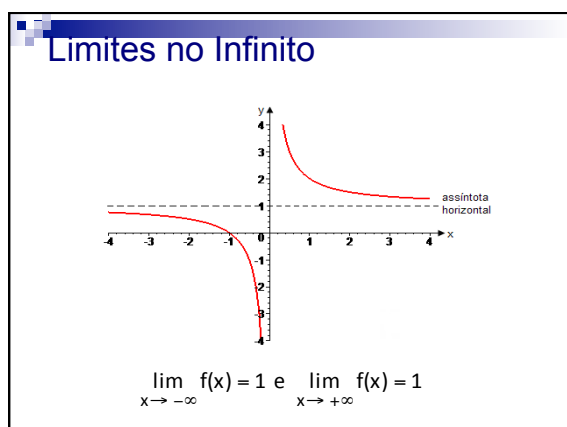
$$= -\infty$$



Divida o numerador e o denominador por x .
 O numerador agora tende a ∞ ao passo que o denominador tende a 7, então a razão $\rightarrow -\infty$

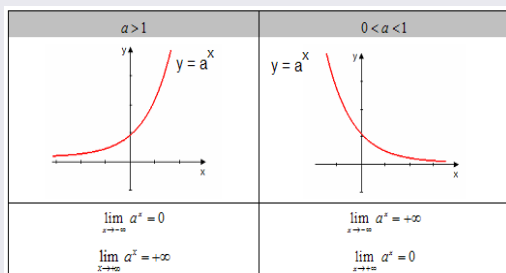






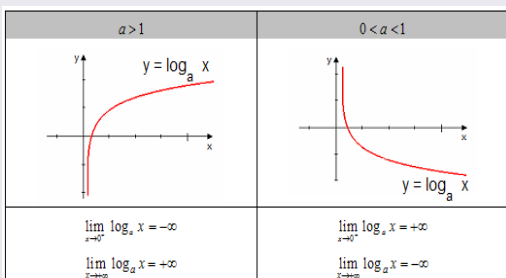
Limites Infinitos

Limites nos extremos do domínio da função exponencial



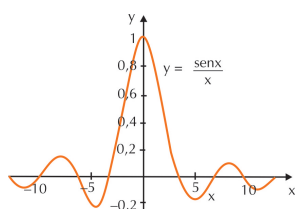
Limites Infinitos

Limites nos extremos do domínio da função logarítmica



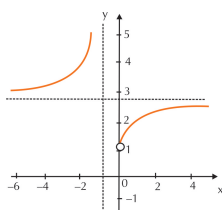
Limite Trigonométrico Fundamental

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Limite Exponencial Fundamental

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

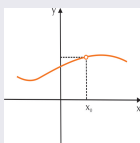


Limite – Cálculo 1

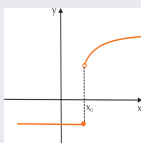
Continuidade de uma função em um número

Uma função f é contínua em um número x_0 se

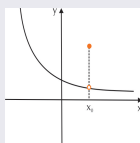
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$



a)



b)



c)

Nenhuma destas funções é contínua em $x = x_0$.



Limites Laterais

Para ter um limite L quando x se aproxima de a , uma função f deve ser definida em *ambos os lados* de a e seus valores $f(x)$ devem se aproximar de L quando x se aproxima de a de cada lado. Por isso, limites comuns são **bilaterais**.

Se f não tem um limite bilateral em a , ainda pode ter um limite lateral, ou seja, um limite cuja aproximação ocorre apenas de um lado. Se a aproximação for feita pelo lado direito, o limite será um **limite à direita**. Se for pelo lado esquerdo, será um **limite à esquerda**.

Definições: Limites Laterais à Direita e à Esquerda.

Seja $f(x)$ definida em um intervalo (a, b) , onde $a < b$. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L conforme x se aproxima de a nesse intervalo, dizemos que f tem limite lateral à direita L em a e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Seja $f(x)$ definida em um intervalo (c, a) , onde $c < a$. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de M conforme x se aproxima de a nesse intervalo, dizemos que f tem limite lateral à esquerda M em a e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$$

Limites Laterais

Para ter um limite L quando x se aproxima de a , uma função f deve ser definida em *ambos os lados* de a e seus valores $f(x)$ devem se aproximar de L quando x se aproxima de a de cada lado. Por isso, limites comuns são **bilaterais**.

Se f não tem um limite bilateral em a , ainda pode ter um limite lateral, ou seja, um limite cuja aproximação ocorre apenas de um lado. Se a aproximação for feita pelo lado direito, o limite será um **limite à direita**. Se for pelo lado esquerdo, será um **limite à esquerda**.

Definições: Limites Laterais à Direita e à Esquerda.

Seja $f(x)$ definida em um intervalo (a, b) , onde $a > b$. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de L conforme x se aproxima de a nesse intervalo, dizemos que f tem limite lateral à direita L em a e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Seja $f(x)$ definida em um intervalo (c, a) , onde $c < a$. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próximo de M conforme x se aproxima de a nesse intervalo, dizemos que f tem limite lateral à esquerda M em a e escrevemos

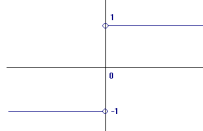
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = M$$

Exemplo:

Para a função $g(x) = \frac{x}{|x|}$ na figura, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{x}{x} = 1$$

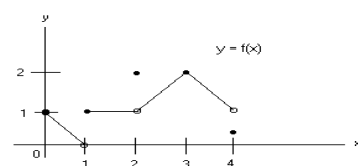
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$



Teorema 5 – Relação entre os Limites Lateral e Bilateral

Uma função $f(x)$ terá um limite quando x se aproximar de c se e somente se tiver um limite lateral à direita e um à esquerda e os dois limites laterais forem iguais:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Exemplo 8 – Limites da Função no Gráfico da Figura

Em $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existem. A função não é

definida à esquerda de $x = 0$.

Em $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ ainda que $f(1) = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1,$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe. Os limites à direita e à esquerda não são iguais.

Em $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \text{ ainda que } f(2) = 2$$

Em $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$$

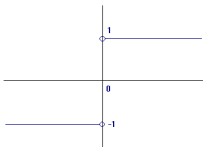
Em $x = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1 \text{ ainda que } f(4) \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \text{ não existem. A função não é definida à direita de } x = 4.$$

Em qualquer outro ponto a em $[0, 4]$, $f(x)$ tem limite $f(a)$.

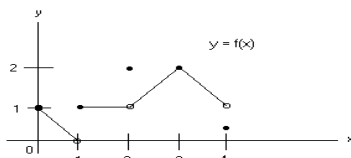
Exemplo:
Para a função $g(x) = \frac{x}{|x|}$ na figura, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{0^- - x} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$


Teorema 5 – Relação entre os Limites Lateral e Bilateral

Uma função $f(x)$ terá um limite quando x se aproximar de c se e somente se tiver um limite lateral à direita e um à esquerda e os dois limites laterais forem iguais:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Exemplo 8 – Limites da Função no Gráfico da Figura

Em $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existem. A função não é definida à esquerda de $x = 0$.

Em $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$ ainda que $f(1) = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$,

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe. Os limites à direita e à esquerda não são iguais.

Em $x = 2$:

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ainda que $f(2) = 2$

Em $x = 3$:

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 2$

Em $x = 4$:

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1$ ainda que $f(4) \neq 1$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ não existem. A função não é definida à direita de $x = 4$.

Em qualquer outro ponto a em $[0, 4]$, $f(x)$ tem limite $f(a)$.
