

Interpolação Polinomial

0011 0010

1
4
5

Introdução:

A interpolação consiste em determinar uma função que assume valores conhecidos em certos pontos. A classe de funções escolhida para a interpolação é a priori arbitrária, e deve ser adequada às características que pretendemos que a função possua.

0011 0010

1
4
5

Um dos motivos desta aproximação é:

➤ Estimar valores intermediários entre dados precisos.

EXEMPLO: É sabido que no Brasil é realizado censo geral a cada 10 anos. Portanto nos anos em que é realizado o censo, tem-se dados precisos da população do país. Os valores do número de habitantes em anos intermediários pode ser estimado através de uma interpolação.

0011 0010

1
4
5

Problema Geral da Interpolação

Considere a tabela abaixo com $(n+1)$ pontos distintos:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

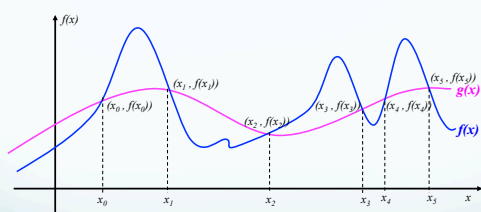
A interpolação de $f(x)$ consiste em se obter uma função $g(x)$, tal que:

$$\begin{aligned} g(x_0) &= f(x_0) \\ g(x_1) &= f(x_1) \\ &\vdots \\ g(x_n) &= f(x_n) \end{aligned}$$

0011 0010

1
4
5

Graficamente:



0011 0010

1
4
5

Nesta unidade consideraremos que $g(x)$ pertence à classe das funções polinomiais.

OBSERVAÇÃO:

- Existem outras formas de interpolação polinomial como, por exemplo, a fórmula de Taylor para a qual as condições de interpolação são outras.
- Assim como $g(x)$ foi escolhida entre as funções polinomiais, poderíamos ter escolhido $g(x)$ como função racional, função trigonométrica, etc.

0011 0010

1
4
5

Polinômio interpolador:

Consideremos o intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ e uma função f cujos valores são conhecidos naqueles pontos. Um polinômio P , de grau menor do que ou igual a n , que satisfaz $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, chama-se **polinômio interpolador de f nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$** .

0011 0010

1
4
5

Teorema (Existência e Unicidade)

Dado um conjunto de $n + 1$ pontos distintos, isto é (x_k, f_k) , $k = 0, 1, \dots, n$, com $x_k \neq x_j$ para $k \neq j$. Existe um único polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n , tal que $p(x_k) = f(x_k) = f_k$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

DEMONSTRAÇÃO

0011 0010

1
4
5

Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Para obter os a_i usamos a condição de interpolação $f_k = p(x_k)$ para $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Logo, segue que:

$$f_0 = p(x_0) = a_0 + a_1(x_0) + a_2(x_0)^2 + \dots + a_n(x_0)^n$$

$$f_1 = p(x_1) = a_0 + a_1(x_1) + a_2(x_1)^2 + \dots + a_n(x_1)^n$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f_n = p(x_n) = a_0 + a_1(x_n) + a_2(x_n)^2 + \dots + a_n(x_n)^n$$

Que corresponde ao sistema linear da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

0011 0010

1
4
5

A matriz A , associada ao sistema, é uma matriz de Vandermonde, cujo o determinante é dado por

$$\text{Det}(A) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{i-1} (x_i - x_j)$$

Como $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$, segue que o determinante da matriz A é diferente de zero e portanto o sistema admite uma única solução

0011 0010

EXEMPLO

Forma de Lagrange

0011 0010

1
4
5

Vamos considerar o conjunto de $n + 1$ pontos (x_k, f_k) , $k = 0, 1, 2, \dots, n$, distintos e vamos considerar o polinômio representado por

$$p_n(x) = f_0L_0(x) + f_1L_1(x) + \dots + f_nL_n(x) = \sum_{k=0}^n f_kL_k(x)$$

onde $L_k(x)$ é um polinômio de grau $\leq n$ que satisfaz a relação:

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ 1 & \text{se } k = j \end{cases}$$

Com isto temos que

$$p_n(x_j) = f_0L_0(x_j) + f_1L_1(x_j) + \dots + f_jL_j(x_j) + \dots + f_nL_n(x_j)$$

$$p_n(x_j) = f_j$$

0011 0010

1
4
5

Logo $p_n(x)$ satisfaz a condição de interpolação, sendo assim, o polinômio interpolador de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$. Os polinômios $L_k(x)$ são chamados de **polinômios de Lagrange** e estes são obtidos da seguinte forma:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

0011 0010

1
4
5

Interpolação Polinomial - Polinômio de Lagrange

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$x_0 = -2 \quad f(x_0) = +2$
 $x_1 = 0 \quad f(x_1) = -2$
 $x_2 = 4 \quad f(x_2) = 1$

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-4)}{(-2-0)(-2-4)} = \frac{(x^2-4x)}{12} \cdot 12 = \frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3}$
 $L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+2)(x-4)}{(0+2)(0-4)} = \frac{(x^2-2x-8)}{-8} \cdot (-2) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - 2$
 $L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+2)(x-0)}{(4+2)(4-0)} = \frac{(x^2+2x)}{24} \cdot 1 = \frac{x^2}{24} + \frac{x}{12}$

$P(x) = \frac{11x^2}{24} - \frac{13x}{12} - 2$

Interpolação Polinomial - Polinômio de Lagrange

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$x_0 = -2 \quad f(x_0) = +2$
 $x_1 = 0 \quad f(x_1) = -2$
 $x_2 = 4 \quad f(x_2) = 1$

x_i	$P(x)$	$f(x_i)$
-2	$P(-2) = \frac{11 \cdot (-2)^2}{24} - \frac{13 \cdot (-2)}{12} - 2 = 2$	2
0	$P(0) = \frac{11 \cdot 0^2}{24} - \frac{13 \cdot 0}{12} - 2 = -2$	-2
4	$P(4) = \frac{11 \cdot 4^2}{24} - \frac{13 \cdot 4}{12} - 2 = 1$	1

Exemplo: Vamos considerar a tabela de pontos do exemplo anterior e determinar uma aproximação para $f(0.3)$ usando a forma de Lagrange.

x_k	0.0	0.2	0.4
f_k	4.00	3.84	3.76

Calculando os $L_k(x)$ temos:

$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.2)(x-0.4)}{(0-0.2)(0-0.4)} = \frac{1}{0.08}(x^2-0.6x+0.08)$
 $L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0)(x-0.4)}{(0.2-0)(0.2-0.4)} = \frac{1}{0.04}(x^2-0.4x)$
 $L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0)(x-0.2)}{(0.4-0)(0.4-0.2)} = \frac{1}{0.08}(x^2-0.2x)$

0011 0010

1
4
5

Fazendo: $p_n(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$

Obtemos: $p(x) = x^2 - x + 4$.

Observe que o polinômio é o mesmo que foi obtido via sistema linear. Isto já era esperado, pois o polinômio interpolador é **único**.

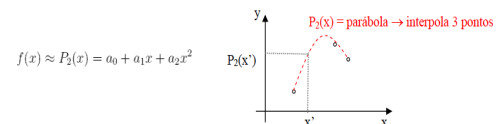
Desta forma, para $x = 0.3 \in [0, 0.4]$, teremos $f(0.3) \approx p(0.3) = 3.79$.

0011 0010

1
4
5

3.2. Interpolação quadrática

Sejam três pares ordenados (x_0, y_0) , (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , com x_i distintos, de uma função $y = f(x)$. Para obtermos uma aproximação de $f(x')$, $x' \in (x_0, x_2)$ faz-se a seguinte aproximação:



onde $P_2(x)$ é um polinômio interpolador de 2ª ordem, ou grau 2. Impondo que o polinômio interpolador passe pelos três pares ordenados, temos o seguinte sistema de equações lineares de 3ª ordem:

$$\begin{cases} P_2(x_0) = y_0 \\ P_2(x_1) = y_1 \\ P_2(x_2) = y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

ou reescrevendo na forma matricial temos:

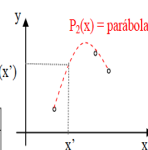
$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

O sistema de equações lineares admite uma única solução, pois o $\text{Det}(X) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0) \neq 0$. Desta forma, pelos três pares ordenados passa um único polinômio interpolador de 2ª grau. Este fato pode ser generalizado, dizendo-se que por $n + 1$ pontos passa um único polinômio de grau n .

Exemplo 2

Determinar $P_2(0.2)$ usando os dados da tabela abaixo:

i	0	1	2
x_i	0.1	0.6	0.8
y_i	1.221	3.320	4.953



Os coeficientes do polinômio interpolador são determinados pela solução do sistema linear

$$\begin{aligned} P_2(x_0) = f(x_0) = y_0 \\ a_0 \times 1 + a_1 \times 0.1 + a_2 \times 0.1^2 = 1.221 \\ a_0 \times 1 + a_1 \times 0.6 + a_2 \times 0.6^2 = 3.320 \\ a_0 \times 1 + a_1 \times 0.8 + a_2 \times 0.8^2 = 4.953 \end{aligned} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0.1^2 \\ 1 & 0.6 & 0.6^2 \\ 1 & 0.8 & 0.8^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.221 \\ 3.320 \\ 4.953 \end{bmatrix}$$

0011 0010

452

Resolvendo o sistema de baixo para cima temos:

$$a_2 = 5.667; \quad a_1 = 0.231 \quad a_0 = 1.141$$

Dessa forma o polinômio $P_2(x)$ terá a seguinte forma:

$$P_2(x) = 1.141 + 0.231x + 5.667x^2$$

0011 0010

452

Forma de Newton

0011 0010

452

FÓRMULA DE NEWTON PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR

Seja $f(x)$ uma função contínua e com derivadas contínuas em $[a, b]$.

Sejam $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n + 1$ pontos distintos da função.

Deseja-se construir o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ nestes pontos.

0011 0010

452

Aplicando sucessivamente o mesmo raciocínio, obtém-se a fórmula de Newton para o polinômio interpolador dada por:

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

$$\text{Dica: } P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

onde $f[x_0] = f(x_0)$;

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \end{aligned}$$

e o erro de truncamento dado pela expressão:

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$$

0011 0010

452

Esquema prático

x_i	$f[x_i]$	$[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	...
x_0	$f[x_0] = f_0$			
x_1	$f[x_1] = f_1$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	
x_2	$f[x_2] = f_2$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$	...
x_3	$f[x_3] = f_3$	$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2}$	...
x_4	$f[x_4] = f_4$	$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3}$	$\vdots$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

0011 0010

452

Considere a seguinte tabela:

x	1	3	4	5
f(x)	0	6	24	60

Diferença Dividida

x	f(x)	Δ_1	Δ_2	Δ_3
x_0 1	0			
x_1 3	6	$\frac{6-0}{3-1} = 3$	$\frac{19-3}{4-1} = 5$	$\frac{9-5}{5-3} = 1$
x_2 4	24	$\frac{24-6}{4-3} = 18$	$\frac{36-18}{5-3} = 9$	
x_3 5	60	$\frac{60-24}{5-4} = 36$		

$$p(x) = f(x_0) + (x-x_0) \cdot \Delta_1 + (x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \Delta_2 + (x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \Delta_3$$

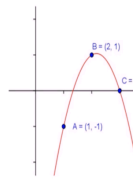
$$p(x) = 0 + (x-1) \cdot 3 + (x-1) \cdot (x-3) \cdot 5 + (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot 1$$

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

0011 0010

452

Observe o gráfico a seguir



Determine o polinômio interpolador de Newton

$$p(x) = f(x_0) + (x-x_0) \cdot \Delta_1 + (x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \Delta_2$$

$$p(x) = -1 + (x-1) \cdot 2 + (x-1) \cdot (x-2) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$p(x) = -1 + 2x - 2 + \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$p(x) = -1 + 2x - 2 - \frac{3x^2 - 9x + 6}{4} \rightarrow p(x) = \frac{-3x^2 + 13x - 6}{4}$$

x	y	Δ_1
x_0 1	-1	
x_1 2	1	$\frac{1-(-1)}{2-1} = 2$
x_2 3	0	$\frac{0-1}{3-2} = -1$
		Δ_2
		$\frac{2-(-1)}{3-1} = \frac{3}{2}$

$$p(x) = -1.5x^2 + 6.5x - 6$$

Interpolação Polinomial

Interpolação com diferenças finitas (Gregory Newton):

Este método é um caso especial do método de Newton, quando os valores dos x_i estão igualmente espaçados. Neste caso, trabalhamos com um novo operador: O operador de diferença finita ascendente (Δ).

0011 0010

452

Operador de diferença finita ascendente:

Este operador é mais simples de calcular do que o operador de diferenças divididas, pois leva em conta somente os valores de y :

Ordem 0: $\Delta^0 y_i = y_i$

Ordem 1: $\Delta y_i = \Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i$

Ordem 2: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$

$\vdots$

Ordem n: $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$

0011 0010

452

Interpolação Polinomial

A relação entre os operadores de diferença dividida e de diferença finita ascendente é:

$$\Delta^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n! h^n}$$

0011 0010

452

Fórmula de Gregory Newton:

O polinômio interpolador de Gregory-Newton é encontrado através da seguinte fórmula:

$$\text{Onde: } P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\Delta^i y_0}{i!} \cdot \prod_{j=0}^{i-1} (u_x - j) \right]$$

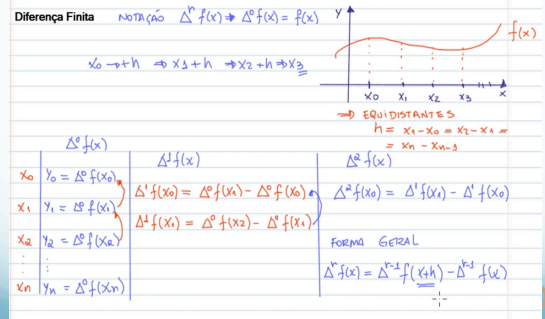
h é o passo dos valores x_i , ou seja $h = x_{i+1} - x_i$
 u_x é encontrado através da fórmula:

$$u_x = \frac{x - x_0}{h}$$

0011 0010

452

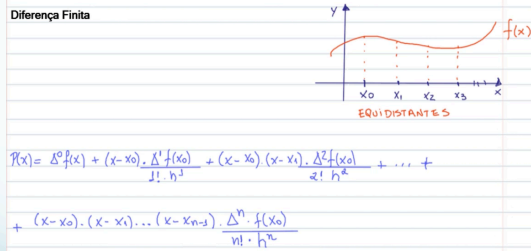
Interpolação Polinomial: Método de Newton-Gregory



0011 0010

5

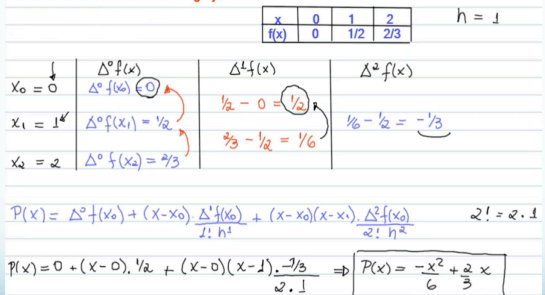
Interpolação Polinomial: Método de Newton-Gregory



0011 0010

5

Considere a função $f(x)$ com os pontos dados da tabela. Determine o polinômio interpolador usando o método de Newton-Gregory.



0011 0010

5