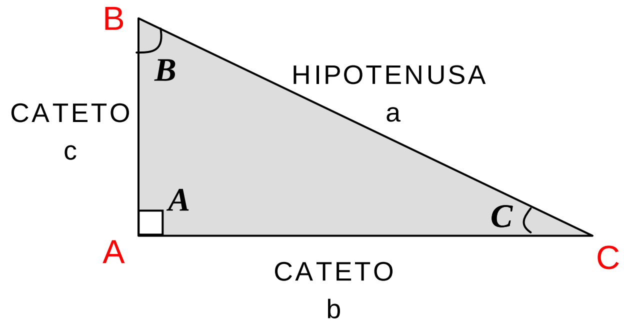
MATEMÁTICA

Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo

TRIÂNGULO RETÂNGULO:



Teorema de Pitágoras:

$a \rightarrow hipotenusa$

$\left.\begin{matrix} b \\ c \end{matrix}\right\} \rightarrow catetos$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Soma dos ângulos internos de um polígono:

$Sp = 180 \cdot (n-2) \rightarrow$ *Em que n é o número de lados*

$$\begin{cases} A + B + C = 180° \\ B + C = 90° \end{cases}$$

- Quando a soma de dois ângulos é igual a 90° dizemos que eles são complementares, portanto:

$$\boxed{B \text{ e } C \text{ são ângulos complementares}}$$

Neste caso, as funções são iguais às co-funções

$$\boxed{\begin{matrix} \bullet\ Sen\ B = Cos\ C \\ \bullet\ Cos\ B = Sen\ C \end{matrix}}$$

Relações primitivas:

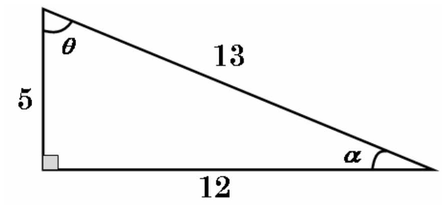
01. Seno
02. Cosseno

Relações derivadas:

01. Tangente
02. Cotangente
03. Secante
04. Cossecante

$Sen\ \hat{A} = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \hat{A}}{hipotenusa}$	$Cos\ \hat{A} = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \hat{A}}{hipotenusa}$
$Tg\ \hat{A} = \dfrac{cateto\ oposto\ a\ \hat{A}}{cateto\ adjacente\ a\ \hat{A}}$	$Cotg\ \hat{A} = \dfrac{cateto\ adjacente\ a\ \hat{A}}{cateto\ oposto\ a\ \hat{A}}$
$Sec\ \hat{A} = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ adjacente\ a\ \hat{A}}$	$Cos\sec\ \hat{A} = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ oposto\ a\ \hat{A}}$

Exemplo:



Relações recíprocas

$Sen\,\theta = \dfrac{1}{Cos\sec\theta} \quad \Rightarrow \quad Sen\,\theta \cdot Cos\sec\theta = 1$

$Cos\,\theta = \dfrac{1}{Sec\,\theta} \quad \Rightarrow \quad Cos\,\theta \cdot Sec\,\theta = 1$

$Tg\,\theta = \dfrac{1}{Cotg\,\theta} \quad \Rightarrow \quad Tg\,\theta \cdot Cotg\,\theta = 1$

Exemplo:

$\dfrac{1}{Sen\,36°} = Cos\sec 36° \qquad \dfrac{1}{Cos\,30°} = Sec\,30°$

$Sen\,\beta \cdot Cos\sec 36° = 1 \Rightarrow \beta = \boxed{}$

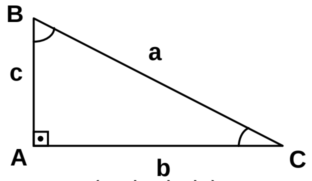
$Tg\,48° \cdot Cotg\,\alpha° = 1 \Rightarrow \alpha = \boxed{}$

Propriedade dos ângulos complementares:

Se α e θ são complementares, temos:

1- TRIÂNGULO RETÂNGULO

TRIÂNGULO RETÂNGULO é aquele que possui um ângulo reto (90º). Dizemos que o triângulo a seguir é retângulo em A, veja:



Onde:
a é a hipotenusa (maior lado);
b e **c** são os catetos (formam o ângulo reto);
$\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos agudos complementares, isto é, $\hat{B}+\hat{C}=90º$;

2- RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

No TRIÂNGULO RETÂNGULO ABC são válidas as seguintes RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS (entre os elementos mencionadas acima):

RAZÃO 01: SENO DO ÂNGULO $\hat{B}$ – É a razão entre o cateto oposto ao ângulo $\hat{B}$ e a hipotenusa.

$$\boxed{\text{sen}\hat{B}=\frac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}}}$$

RAZÃO 02: COSSENO DO ÂNGULO $\hat{B}$ – É a razão entre o cateto adjacente ao ângulo $\hat{B}$ e a hipotenusa.

$$\boxed{\cos\hat{B}=\frac{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}}}$$

RAZÃO 03: TANGENTE DO ÂNGULO $\hat{B}$ – É a razão entre o cateto oposto o adjacente ao ângulo $\hat{B}$.

$$\boxed{\text{tg}\hat{B}=\frac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}}$$

De modo análogo podemos definir as razões seno, cosseno e tangente do ângulo agudo $\hat{C}$.

3- PROPRIEDADES

Observe os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos $\hat{B}$:

$\text{sen}\hat{B}=\frac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}}=\frac{b}{a}$	$\text{sen}\hat{C}=\frac{\text{cateto oposto a }\hat{C}}{\text{hipotenusa}}=\frac{c}{a}$
$\cos\hat{B}=\frac{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}{\text{hipotenusa}}=\frac{c}{a}$	$\cos\hat{C}=\frac{\text{cateto adjacente a }\hat{C}}{\text{hipotenusa}}=\frac{b}{a}$
$\text{tg}\hat{B}=\frac{\text{cateto oposto a }\hat{B}}{\text{cateto adjacente a }\hat{B}}=\frac{b}{c}$	$\text{tg}\hat{C}=\frac{\text{cateto oposto a }\hat{C}}{\text{cateto adjacente a }\hat{C}}=\frac{c}{b}$

Para dois ângulos complementares $\hat{B}$ e $\hat{C}$, isto é, $\hat{B}+\hat{C}=90º$, são válidas as seguintes PROPRIEDADES:

PROPRIEDADE 01: O seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complementar.

$$\boxed{\text{sen}\hat{B}=\cos\hat{C}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\text{sen}\hat{C}=\cos\hat{B}}$$

PROPRIEDADE 02: A tangente de um ângulo é igual ao inverso da tangente de seu complementar.

$$\boxed{\text{tg}\hat{B}=\frac{1}{\text{tg}\hat{C}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\text{tg}\hat{C}=\frac{1}{\text{tg}\hat{B}}}$$

Daí vem que:
$$\begin{cases}\text{sen}\,30º=\cos 60º \text{ e } \text{sen}\,60º=\cos 30º\\ \text{tg}\,30º=\dfrac{1}{\text{tg}\,60º}\\ \text{sen}\,45º=\cos 45º\\ \text{tg}\,45º=\dfrac{1}{\text{tg}\,45º}\end{cases}$$

4- TABELA

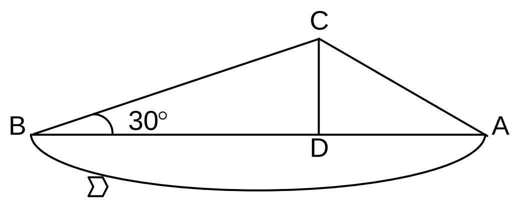
Os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos 30º, 45º e 60º são mostrados na tabela a seguir:

	30º	**45º**	**60º**
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

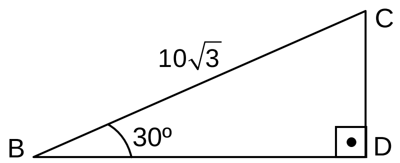
EXEMPLOS RESOLVIDOS

01. (UEPA – PRISE) O mastro $(\overline{CD})$ de um navio é preso verticalmente por cabos de aço fixo na proa (A) e na popa (B), conforme mostra a figura a seguir. Se o cabo $\overline{BC}$ mede $10\sqrt{3}$ m então, a altura do mastro é:

a) $2\sqrt{3}$ m
b) $5\sqrt{3}$ m
c) $8\sqrt{3}$ m
d) $10\sqrt{3}$ m
e) $20\sqrt{3}$ m



Resolução:
Destacamos o triângulo BCD retângulo em D:



A razão trigonométrica a ser aplicada é o seno, pois o mastro $(\overline{CD})$ é o cateto oposto ao ângulo de 30º e o cabo $\overline{BC}$ é a hipotenusa.

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{CD}{10\sqrt{3}} \text{ e como } \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}\text{, temos:}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{CD}{10\sqrt{3}} \Rightarrow CD = \frac{10\sqrt{3}}{2}$$

$$2.CD = 10\sqrt{3} \qquad CD = 5\sqrt{3}$$

Portanto a altura do mastro é $5\sqrt{3}$ m (alternativa b).

02. (UEPA – PRISE) Um botânico interessado em descobrir qual o comprimento da copa de uma árvore fez as observações indicadas na figura abaixo a partir de um ponto no solo. O comprimento (H), em metros, dessa copa é:

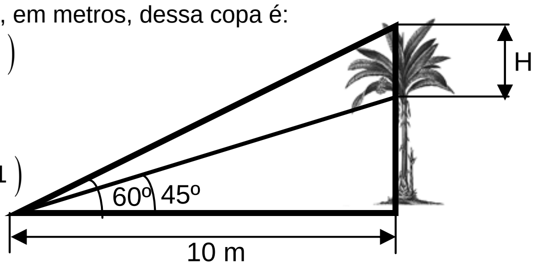
a) $10(\sqrt{3} - 1)$

b) 15

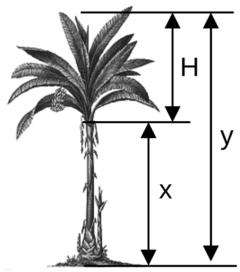
c) $10\sqrt{3}$

d) $10(\sqrt{3} + 1)$

e) 30



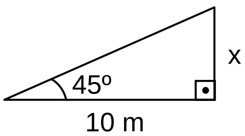
Resolução:
Observe o esquema:



$$\boxed{H + x = y}$$

Destacamos os dois triângulos retângulos a seguir:

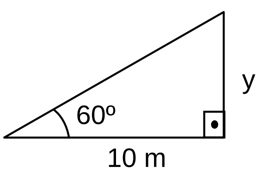
Observe que x representa a medida do tronco da árvore e para calcular este valor aplicamos a tangente de 45º, pois x é o cateto oposto e 10 m é a medida do cateto adjacente.



$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{x}{10} \text{ e como}$$

$\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, temos $1 = \frac{x}{10}$, logo $x = 10$. A medida do tronco da árvore é 10 m.

Observe que y representa a altura da árvore e para calcular este valor aplicamos a tangente de 60º, pois y é o cateto oposto e a medida 10 m é o cateto adjacente.



$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{y}{10} \text{ e como}$$

$\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$, temos $\sqrt{3} = \frac{y}{10}$, logo $y = 10\sqrt{3}$.

Substituindo x e y na relação $H + x = y$, temos:

$$H + 10 = 10\sqrt{3} \Rightarrow H = 10\sqrt{3} - 10 \Rightarrow H = 10.\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

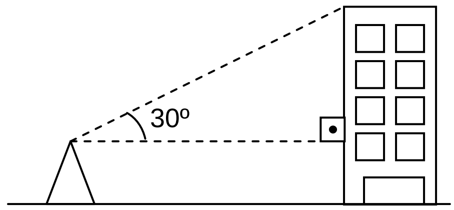
Portanto o comprimento da copa da árvore é $10.\left(\sqrt{3} - 1\right)$ metros.

EXERCÍCIOS (DESTRUIÇÃO TOTAL)

01. (UFSM-RS) Um estudante de engenharia vê um prédio do campus da UFSM construído em um terreno plano, sob um ângulo de 30º. Aproximando-se do prédio mais 40 m, passa a vê-lo sob um ângulo de 60º. Considerando que a base do prédio está no mesmo nível dos olhos do estudante, então a altura h do prédio é igual a:

a) $30\sqrt{3}$ b) $20\sqrt{3}$ c) 10 d) $10\sqrt{3}$ e) 28

02. (UFJF-MG) Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento para medir ângulos) a 200 m do edifício e mediu o ângulo de 30º, como indicado na figura a seguir:



Sabendo que o teodolito está a 1,5 m do solo, pode-se concluir que, dentre os valores a seguir, o que melhor aproxima a altura do edifício, em metros, é:

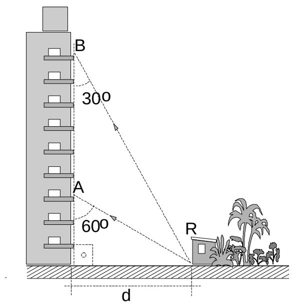
a) 112 b) 115 c) 117 d) 120 e) 124

03. (CEFET-PR) A Rua Tenório Quadros e a avenida Teófilo Silva, ambas retilíneas, se cruzam segundo um ângulo de 30º. O posto de gasolina Estrela do Sul se encontra na Avenida Teófilo Silva a 4000 m do citado cruzamento. Portanto, a distância entre o posto de gasolina Estrela do Sul e a rua Tenório Quadros, em quilômetros, é igual a:

a) 4 b) 12 c) 2 d) 5 e) 8

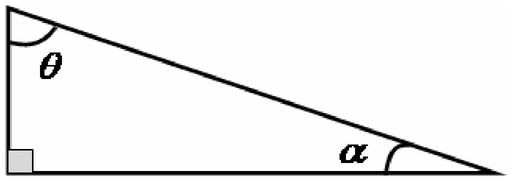
04. (CEFET-PR) Patrik Onom Étrico, um jovem curioso, observa da janela do seu quarto (A) uma banca de revistas (R), bem em frente ao seu prédio, segundo um ângulo de 60º com a vertical. Desejando avaliar a distância do prédio à banca, Patrik sobe seis andares (aproximadamente 16 metros) até o apartamento de um amigo seu, e passa a avistar a banca (do ponto B) segundo um ângulo de 30º com a vertical. Calculando a distância "d", Patrik deve encontrar, aproximadamente, o valor: (Dados: $\sqrt{2} = 1{,}4$; $\sqrt{3} = 1{,}7$)

a) 8,0 m b) 11,2 m c) 12,4 m d) 13,6 m e) 15,0 m



05. (UFSC) Dois pescadores P_1 e P_2, estão na beira de um rio de margens paralelas e conseguem ver um bote B na outra margem. Sabendo que P_1P_2=63 m, os ângulos $B\hat{P}_1P_2 = \alpha$ e $B\hat{P}_2P_1 = \beta$ e que $\operatorname{tg} \alpha = 2$ e $\operatorname{tg} \beta = 4$, determine a distância (em metros) entre as margens.

GABARITO	**01**	**B**	**02**	**C**	**03**	**C**	**04**	**D**	**05**	**84m**



$Sen\,\alpha = Cos\,\theta$	$Sec\,\alpha = Cos\sec\theta$
$Cos\,\alpha = Sen\,\theta$	$Cos\sec\alpha = Sec\,\theta$
$Tg\,\alpha = Cotg\,\theta$	$Cotg\,\alpha = Tg\,\theta$

Dessa forma:

$Sen\ 47° = Cos\ 43°$ ➔ ...

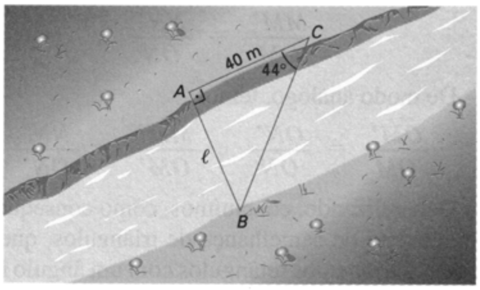
$Tg\ 35° = Cotg\ 55°$ ➔ ...

$Cos\sec\ 12° = Sec\ \theta°$ ➔ $\theta =$ ...

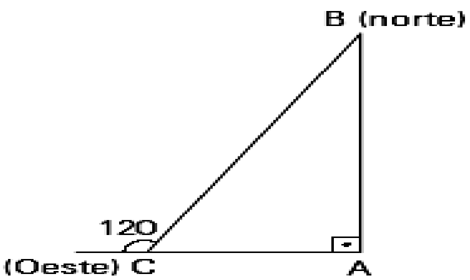
$Sec\ 27° = Cos\sec\ \theta°$ ➔ $\theta =$ ...

ATIVIDADES

01. Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que está e um ponto B na margem oposta (conforme figura). A seguir, desloca-se 40 m perpendicularmente à reta $\overleftrightarrow{AB}$ até o ponto C e mede o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 44º. Dados sen 44º = 0,69, cos 44º = 0,71 e tg 44º = 0,96, calcule a largura do rio.



02. Um pequeno avião deveria partir de uma cidade A rumo a uma cidade B ao norte, distante 60 quilômetros de A. Por um problema de orientação, o piloto seguiu erradamente rumo ao oeste. Ao perceber o erro, ele corrigiu a rota, fazendo um giro de 120° à direita em um ponto C, de modo que o seu trajeto, juntamente com o trajeto que deveria ter sido seguido, formaram, aproximadamente, um triângulo retângulo ABC, como mostra a figura.



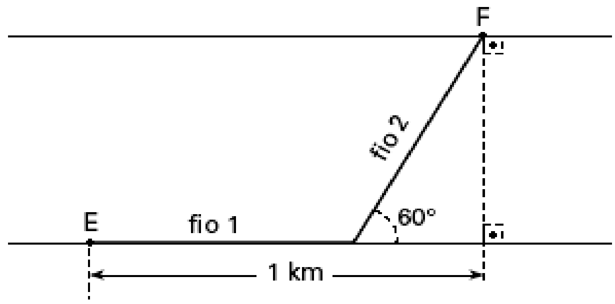
Com base na figura, a distância em quilômetros que o avião voou partindo de A até chegar a B é:

a) $30\sqrt{3}$ c) $40\sqrt{3}$ e) $60\sqrt{3}$
b) $80\sqrt{3}$ d) $90\sqrt{3}$

03. Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A e B. O comandante, quando o navio está no ponto A, observa um farol num ponto C e calcula o ângulo $A\hat{C}B = 30°$. Sabendo-se que o ângulo $A\hat{B}C$ é reto e que a distância entre os pontos A e B é de 6 milhas, de quantas milhas é a distância entre o farol e o ponto B?

a) $6\sqrt{3}$ milhas
b) $18\sqrt{3}$ milhas
c) $2\sqrt{3}$ milhas
d) $3\sqrt{3}$ milhas
e) $5\sqrt{3}$ milhas

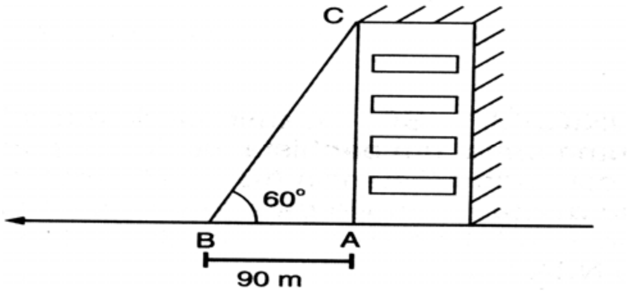
04. Uma estação E, de produção de energia elétrica, e uma fábrica F estão situadas nas margens opostas de um rio de largura $\frac{1}{\sqrt{3}}$ km. Para fornecer energia a F, dois fios elétricos a ligam a E, um por terra e outro por água, conforme a figura.



Supondo-se que o preço do metro do fio de ligação por terra é R$ 12,00 e que o metro do fio de ligação pela água é R$ 30,00, o custo total, em reais, dos fios utilizados é:

a) 28000 c) 18600 e) 24000
b) 25000 d) 15800

05. Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura adiante:



Se ela caminha 90 metros em linha reta, chegará a um ponto B, de onde poderá ver o topo C do prédio, sob um ângulo de 60º. Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo de 30º?

a) 150 c) 270 e) 310
b) 180 d) 300