

Zeros de Funções

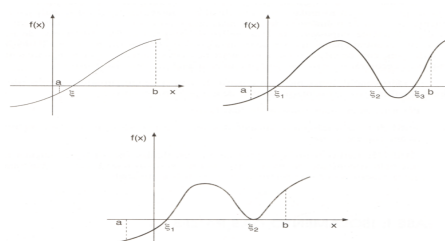
O que são:

- + São valores de domínio que fazem com que a imagem seja 0.
- + x tal que $f(x) = 0$
- + Fase 1: encontrar o intervalo que contem as raízes
- + Fase 2: refinar para se obter uma melhor aproximação

Fase I

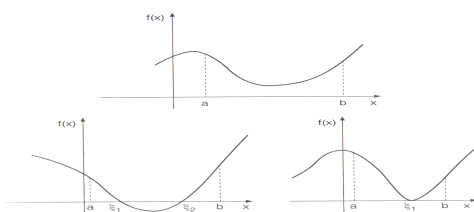
- + Nesta fase fazemos uma análise teórica e gráfica da função $f(x)$
- + O sucesso da fase II depende da precisão desta análise
- + Usamos o Teorema de Cauchy:
 - + seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$
 - + se $f(a)f(b) < 0$ então existe pelo menos um ponto $x = \xi$ entre a e b que é zero de $f(x)$
 - + a prova deste teorema pode ser encontrada em [Guidorizzi, 2001]

FASE I : ANÁLISE GRÁFICA



Figuras extraídas de [Ruggiero, 1996]

FASE I : ANÁLISE GRÁFICA



se $f(a)f(b) > 0$ então podemos ter várias situações no intervalo $[a, b]$. Estas situações e a análise gráfica são discutidas com mais detalhes em [Guidorizzi, 2001] e [Leithold, 1994]

Figuras extraídas de [Ruggiero, 1996]

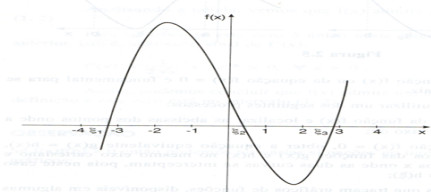
FASE I : ANÁLISE GRÁFICA

- + Vimos portanto, que a análise gráfica do função $f(x)$ é fundamental para se obter boas aproximações para a raiz
- + É suficiente o uso de um dos processos a seguir:
 - i) Esboçar o gráfico de $f(x)$ e localizar a região onde a curva intercepta o eixo das abscissas;
 - ii) A partir da equação $f(x) = 0$ obter a equação equivalente $g(x) = h(x)$ e esboçar seus gráficos. Os pontos de cruzamento das curvas são os zeros procurados, pois $f(\xi) = 0 \Leftrightarrow g(\xi) = h(\xi)$
 - iii) Usar softwares para traçar gráficos

Fase I : Exemplo com processo 1

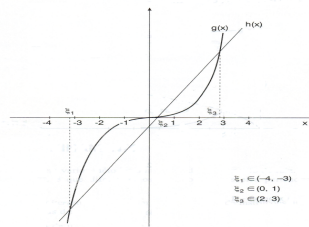
a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$

Usando o processo (I), temos:



Figuras extraídas de [Ruggiero, 1996]

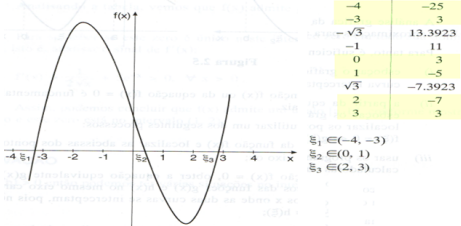
Fase I : Exemplo com processo 2

usando o processo (II): da equação $x^3 - 9x + 3 = 0$, podemos obter a equação equivalente $x^3 = 9x - 3$. Neste caso, temos $g(x) = x^3$ e $h(x) = 9x - 3$. Assim,

Figuras extraídas de [Ruggiero, 1996]

FASE I : TABELA DE VARIAÇÃO DO SINAL

a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$



Figuras extraídas de [Ruggiero, 1996]

Fase II: refinamento

- + Há vários métodos para refinamento da raiz
- + Todos pertencem a classe dos métodos iterativos onde um conjunto de instruções é repetido formando cada passo ou ciclo
- + Eles fornecem uma aproximação da raiz
- + É importante:
 - + Definir o critério de parada
 - + Estudar a convergência e sua eficiência

Teorema de Bolzano

- + Numa função contínua, se $f(a)f(b) < 0$ então temos que existe pelo menos uma raiz entre $[a, b]$.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	-15	-5,6	0	2,6	3	1,8	0	-1,8	-3
	-	-	+	+	+	+	+	-	-

Podemos analisar o gráfico
Podemos separar as funções em formas
simples e identificar as interseções.

$$x^3 = 3x^2 + x - 3$$

