M 7 - Função Exponencial

CADERNO DE ATIVIDADES TERCEIRÃO FTD 2

1 (Furg-RS) O valor da expressão
$A = \dfrac{2^{n+3} + 2^{n+2} - 2^{n-1}}{2^{n-2} + 2^n}$ é:

a) $\dfrac{23}{5}$ b) $\dfrac{46}{10}$ c) $\dfrac{11}{2}$ x d) $\dfrac{46}{5}$ e) $\dfrac{115}{8}$

$\dfrac{2^n(2^3 + 2^2 - 2^{-1})}{2^n(2^{-2} + 1)} = \dfrac{8 + 4 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 1} = \dfrac{46}{5}$

2 (Uniube-MG) Se $A = \sqrt{2^{20} + 2^{23}}$, então *A* é igual a:

x a) $3 \cdot 2^{10}$
b) 2^{13}
c) $1 + 2^{13}$
d) $2^{10} + 2^{\frac{23}{2}}$

$A = \sqrt{2^{20} + 2^{20} \cdot 2^3} \rightarrow A = \sqrt{2^{20} \cdot (1 + 2^3)}$
$A = \sqrt{2^{20} \cdot 9}$
$A = \sqrt{2^{20} \cdot 3^2}$
$A = 2^{10} \cdot 3$

3 (UFRN) Dados os números $M = 9{,}84 \cdot 10^{15}$ e $N = 1{,}23 \cdot 10^{16}$, pode-se afirmar que:

x a) $M < N$
b) $M + N = 1{,}07 \cdot 10^{16}$
c) $M > N$
d) $M \cdot N = 1{,}21 \cdot 10^{31}$

Pelos dados, temos:
$N = 1{,}23 \cdot 10^{16} \rightarrow N = 1{,}23 \cdot 10 \cdot 10^{15}$
$N = 12{,}3 \cdot 10^{15}$, ou seja, $M < N$
$M + N = 9{,}84 \cdot 10^{15} + 12{,}3 \cdot 10^{15} \rightarrow M + N = 10^{15} \cdot (9{,}84 + 12{,}3)$
$M + N = 10^{15} \cdot 22{,}14$
$M + N = 2{,}214 \cdot 10^{16}$
$M \cdot N = 9{,}84 \cdot 10^{15} \cdot 12{,}3 \cdot 10^{15} \rightarrow M \cdot N = 121{,}032 \cdot 10^{30}$
$M \cdot N = 1{,}21032 \cdot 10^{32}$

4 (UAM-SP) Há pouco, Carla procurou-me para mostrar uma coisa interessante. Ela resolveu três equações exponenciais e todas apresentaram o mesmo resultado: $x = 2$.

— Giba, o que é que você acha? Será que é coincidência ou andei errando alguma coisa?

— Deixe-me ver, Carla. Quais são as equações?

— Aqui estão: $3^{x+2} - 3^x = 72$

$2^{x-4} = \dfrac{1}{4}$

$2^{2x} - 2^{x+3} + 16 = 0$

Ela acertou todas as equações?

a) Não, errou a 2ª.
b) Não, acertou apenas a 3ª.
c) Não, errou a 1ª e a 3ª.
d) Não, errou todas.
x e) Sim, acertou todas.

• $3^{x+2} - 3^x = 72 \rightarrow 3^2 \cdot 3^x - 3^x = 72$
$3^x(3^2 - 1) = 72$
$8 \cdot 3^x = 72$
$3^x = 9$
$3^x = 3^2 \rightarrow x = 2$

• $2^{x-4} = \dfrac{1}{4} \rightarrow 2^{x-4} = 2^{-2} \rightarrow x - 4 = -2$
$x = 2$

• $2^{2x} - 2^{x+3} + 16 = 0 \rightarrow y^2 - 8y + 16 = 0 \rightarrow y = 4$
Logo: $2^x = 4 \rightarrow 2^x = 2^2 \rightarrow x = 2$

5 (Unicap-PE) Determine o valor de *x*, tal que $5^{x+1} + 5^{x+2} = 3\,750$.

$5^{x+1} + 5^{x+2} = 3\,750 \rightarrow 5 \cdot 5^x + 5^2 \cdot 5^x = 3\,750$
$5 \cdot 5^x + 25 \cdot 5^x = 3\,750$
$30 \cdot 5^x = 3\,750$
$5^x = 125$
$5^x = 5^3$
$x = 3$

6 (UEMA) Seja $f(x) = 3^{x-4} + 3^{x-3} + 3^{x-2} + 3^{x-1}$. O valor de *x* para que se tenha $f(x) = 40$ é:

a) 0 b) −2 c) 1 x d) 4 e) 3

$f(x) = 3^{x-4} + 3^{x-3} + 3^{x-2} + 3^{x-1}$

$40 = 3^x \cdot 3^{-4} + 3^x \cdot 3^{-3} + 3^x \cdot 3^{-2} + 3^x \cdot 3^{-1}$

$40 = 3^x\left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^1}\right)$

$40 = 3^x\left(\frac{1}{81} + \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right)$

$40 = 3^x\left(\frac{1 + 3 + 9 + 27}{81}\right)$

$40 = 3^x \cdot \frac{40}{81}$

$3^x = 81$

$3^x = 3^4$

$x = 4$

Em questões como a 7, a resposta é dada pela soma dos números que identificam as alternativas corretas.

7 (UEM-PR) Com relação aos números reais, é correto afirmar que:

(01) $-\left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2$

(02) $52 \cdot (49!) - 2 \cdot (49!) = 50!$

(04) $\left|\sqrt{10} - 4\right| = 4 - \sqrt{10}$

(08) o quociente $\frac{1}{2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x}$ é impossível para x = 1

(16) $2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x = 0$, para todo número real *x*

(32) $0{,}25 \cdot 10^{-3} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$

(01) $-\left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 = -\left(\frac{6-3}{2}\right)^2 = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$

$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

A proposição é falsa.

(02) $52 \cdot (49!) - 2(49!) = 49!(52 - 2) = 49!\,50 = 50!$

A proposição é verdadeira.

(04) $\left|\sqrt{10} - 4\right| = \left|4 - \sqrt{10}\right| = 4 - \sqrt{10}$

A proposição é verdadeira.

(08) Substituindo x = 1, vem:

$\frac{1}{2 \cdot 3^1 - 3 \cdot 2^1} = \frac{1}{6 - 6} = \frac{1}{0}$ (impossível)

A proposição é verdadeira.

(16) $2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x = 0 \rightarrow 2 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x$

$\frac{3^x}{2^x} = \frac{3}{2}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow x = 1$

A proposição é falsa.

(32) $0{,}25 \cdot 10^{-3} = 2{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$

A proposição é verdadeira.

Portanto: 02 + 04 + 08 + 32 = 46

8 (UCDB-MS) O conjunto verdade da equação exponencial $\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + 1 = \frac{13 \cdot 2^{x-1}}{3^{x+1}}$ é:

a) $\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ c) $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}$ x e) {1, −1}

b) $\left\{-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}\right\}$ d) {1, 0}

$\frac{2^{2x}}{3^{2x}} + 1 = \frac{13 \cdot 2^{x-1}}{3^{x+1}} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 1 = \frac{13 \cdot 2^x \cdot 2^{-1}}{3^x \cdot 3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 1 = \frac{2^x \cdot \left(\frac{13}{2}\right)}{3^x \cdot 3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 1 = \frac{13}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Substituindo $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, temos:

$y^2 + 1 = \frac{13}{6} \cdot y \rightarrow \frac{6y^2 + 6}{\cancel{6}} = \frac{13y}{\cancel{6}}$

$6y^2 - 13y + 6 = 0$ $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = \frac{3}{2}$

Logo:

Se $y = \frac{2}{3}$, temos: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow x = 1$

Se $y = \frac{3}{2}$, temos: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \rightarrow x = -1$

Portanto: S = {−1, 1}

9 (UESPI) O conjunto verdade da equação $2^x - 2^{-x} = 5(1 - 2^{-x})$ é igual a:

a) {1, 4} c) {0, 1} e) { }

b) {1, 2} x d) {0, 2}

$2^x - 2^{-x} = 5(1 - 2^{-x}) \rightarrow 2^x - \frac{1}{2^x} = 5\left(1 - \frac{1}{2^x}\right)$

Substituindo $2^x = y$, temos:

$y - \frac{1}{y} = 5 - \frac{5}{y}$

$y^2 - 1 = 5y - 5$

$y^2 - 5y + 4 = 0$ $y_1 = 4$, $y_2 = 1$

Portanto:

$2^x = 4$ ou $2^x = 1$

$2^x = 2^2$ $2^x = 2^0$

$x = 2$ $x = 0$

Portanto: S = {0, 2}

10 (UFSM-RS) Um piscicultor construiu uma represa para criar traíras. Inicialmente, colocou 1 000 traíras na represa e, por um descuido, soltou 8 lambaris. Suponha-se que o aumento das populações de lambaris e traíras ocorra, respectivamente, segundo as leis $L(t) = L_0 10^t$ e $T(t) = T_0 2^t$, onde L_0 é a população inicial de lambaris, T_0, a população inicial de traíras, e *t*, o número de anos que se conta a partir do ano inicial.
Considerando-se log 2 = 0,3, o número de lambaris será igual ao de traíras depois de quantos anos?

a) 30 b) 18 c) 12 d) 6 x e) 3

$L(t) = T(t) \to 8 \cdot 10^t = 1\,000 \cdot 2^t$

$10^t = 125 \cdot 2^t$

$\frac{10^t}{2^t} = 125$

$5^t = 125$

$5^t = 5^3$

t = 3 anos

11 (Cefet-PR) Cientistas de um certo país, preocupados com as possibilidades cada vez mais ameaçadoras de uma *guerra biológica*, pesquisam uma determinada bactéria que cresce segundo a expressão $P(t) = \frac{256}{125} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1}$, onde *t* representa o tempo em horas. Para obter-se uma população de 3 125 bactérias, será necessário um tempo, em horas, com valor absoluto no intervalo:

a)]0, 2]
b)]2, 4]
c)]4, 6]
x d)]6, 8]
e)]8, 10]

$3\,125 = \frac{256}{125} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1} \to 5^5 = \frac{2^8}{5^3} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1}$

$\frac{5^8}{2^8} = \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1}$

$\left(\frac{5}{2}\right)^8 = \left(\frac{5}{2}\right)^{t+1}$

t + 1 = 8

t = 7 h

12 (UCDB-MS) Certa substância radioativa de massa M_0, no instante t = 0, tende a se transformar em outra substância não radioativa.
Para cada instante $t \geqslant 0$, dado em segundos, a massa da substância radioativa restante obedece à lei $M(t) = M_0\, 3^{-2t}$. Nessas condições, o tempo necessário, em segundos, para que a massa da substância radioativa seja reduzida a um terço da massa inicial é igual a:

a) 3 b) 2,5 c) 1,5 d) 1 x e) 0,5

Devemos ter $M(t) = \frac{M_0}{3}$. Logo:

$M(t) = M_0 \cdot 3^{-2t} \to \frac{M_0}{3} = M_0 \cdot 3^{-2t}$

$\frac{1}{3} = 3^{-2t}$

$3^{-1} = 3^{-2t}$

$-2t = -1$

$t = \frac{1}{2}$ ou t = 0,5 s

13 (Vunesp-SP) Num período prolongado de seca, a variação da quantidade de água de certo reservatório é dada pela função:

$$q(t) = q_0 \cdot 2^{(-0,1)t}$$

sendo q_0 a quantidade inicial de água no reservatório e q(t) a quantidade de água no reservatório após *t* meses. Em quantos meses a quantidade de água do reservatório se reduzirá à metade do que era no início?

a) 5 b) 7 c) 8 d) 9 x e) 10

A quantidade de água do reservatório se reduzirá à metade quando $q(t) = \frac{1}{2} q_0$:

$q(t) = q_0 \cdot 2^{(-0,1)t} \to \frac{1}{2} q_0 = q_0 \cdot 2^{(-0,1)t}$

$2^{-1} = 2^{-0,1t}$

$-0,1t = -1$

t = 10

14 (FGV-SP) Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão $Q(t) = 700 - 400e^{-0,5t}$, onde

Q = quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário
t = meses de experiência
$e \simeq 2,7183$

a) De acordo com esta expressão, quantas peças um funcionário com 2 meses de experiência deverá produzir mensalmente?
b) E um funcionário sem qualquer experiência, quantas peças deverá produzir mensalmente?
Compare este resultado com o resultado do item *a*.
Há coerência entre eles?

a) Sendo $Q(t) = 700 - 400 \cdot e^{-0,5t}$, temos:
$Q(2) = 700 - 400 \cdot e^{(-0,5)(2)}$
$Q(2) = 700 - 400 \cdot e^{-1}$
$Q(2) = 700 - \frac{400}{e}$
$Q(2) \simeq 552$
b) $Q(0) = 700 - 400 \cdot e^{(-0,5)(0)}$
$Q(0) = 700 - 400 \cdot e^{0}$
$Q(0) = 700 - 400$
$Q(0) = 300$
Comparando esses resultados, observamos que $Q(2) > Q(0)$, isto é, a eficiência de um funcionário com 2 meses de experiência é maior do que a de um funcionário sem qualquer experiência.

15 (Vunesp-SP) Uma fórmula matemática para se calcular aproximadamente a área, em metros quadrados, da superfície corporal de uma pessoa, é dada por:
$S(p) = \frac{11}{100} p^{\frac{2}{3}}$, onde *p* é a massa da pessoa em quilogramas.
Considere uma criança de 8 kg. Determine:
a) a área da superfície corporal da criança
b) a massa que a criança terá quando a área de sua superfície corporal duplicar (use a aproximação $\sqrt{2} = 1,4$)

a) Temos: $S(8) = \frac{11}{100} \cdot 8^{\frac{2}{3}} \rightarrow S(8) = \frac{11}{100} \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} = \frac{11}{100} \cdot 2^2 = 0,44$

$S(8) = 0,44\ m^2$

b) Duplicando a área corporal, teremos $0,88\ m^2$.
Então, $\frac{11}{100} \cdot p^{\frac{2}{3}} = 0,88\ (p > 0) \rightarrow p^{\frac{2}{3}} = 8$
$p = 2^4 \cdot \sqrt{2} = 16 \cdot 1,4 = 22,4$

16 (Unicamp-SP) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha 3^{\beta t}$, onde $T(t)$ é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante *t*, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de -18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a -16 °C após 270 minutos.
a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.
b) Determine o valor de *t* para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)$ °C superior à temperatura ambiente.

Consideremos que a temperatura T_A também seja expressa em graus Celsius.
a) Do enunciado, podemos concluir que:
$$\begin{cases} 0 = -18 + \alpha \cdot 3^{90\beta} \\ -16 = -18 + \alpha \cdot 3^{270\beta} \end{cases}$$
Resolvendo esse sistema, obtemos:
$$\begin{matrix} \alpha \cdot 3^{90\beta} = 18 \\ \alpha \cdot 3^{270\beta} = 2 \end{matrix} \rightarrow \frac{\alpha \cdot 3^{90\beta}}{\alpha \cdot 3^{270\beta}} = \frac{18}{2}$$
$3^{(90\beta - 270\beta)} = 9$
$3^{90\beta - 270\beta} = 3^2$
$90\beta - 270\beta = 2$
$\beta = -\frac{2}{180}$
$\beta = -\frac{1}{90}$

O valor de α é igual a:
$\alpha \cdot 3^{90\beta} = 18 \rightarrow \alpha \cdot 3^{90\left(-\frac{1}{90}\right)} = 18$
$\alpha \cdot 3^{-1} = 18$
$\alpha = 54$

b) Sendo $T = \left(-18 + \frac{2}{3}\right)$ °C, temos:

$T(t) = -18 + 54 \cdot 3^{-\frac{1}{90}t} \rightarrow -18 + \frac{2}{3} = -18 + 54 \cdot 3^{-\frac{1}{90}t}$
$\frac{2}{3} = 54 \cdot 3^{-\frac{1}{90}t}$
$\frac{1}{3} = 27 \cdot 3^{-\frac{1}{90}t}$
$\frac{1}{81} = 3^{-\frac{1}{90}t}$
$3^{-4} = 3^{-\frac{1}{90}t}$
$-\frac{1}{90}t = -4$
$t = 360$ min

17 (UERJ) Utilize os dados abaixo para responder às questões.

> Em um município, após uma pesquisa de opinião, constatou-se que o número de eleitores dos candidatos *A* e *B* variava em função do tempo *t*, em anos, de acordo com as seguintes funções:
>
> $A(t) = 2 \cdot 10^5(1{,}6)^t$ $\quad$ $B(t) = 4 \cdot 10^5(0{,}4)^t$
>
> Considere as estimativas corretas e que t = 0 refere-se ao dia 1 de janeiro de 2000.

a) Calcule o número de eleitores dos candidatos *A* e *B* em 1º de janeiro de 2000.

b) Determine em quantos meses os candidatos terão o mesmo número de eleitores.

c) Mostre que, em 1º de outubro de 2000, a razão entre os números de eleitores de *A* e *B* era maior que 1.

a) Candidato *A* → $A(0) = 2 \cdot 10^5(1{,}6)^0 = 200\,000$ eleitores
Candidato *B* → $B(0) = 4 \cdot 10^5(0{,}4)^0 = 400\,000$ eleitores

b) $Af(t) = B(t) \Leftrightarrow 2 \cdot 10^5(1{,}6)^t = 4 \cdot 10^5(0{,}4)^t$

$$\left(\frac{1{,}6}{0{,}4}\right)^t = \frac{4 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5} \rightarrow 4^t = 2 \rightarrow t = \frac{1}{2} \rightarrow t = 6 \text{ meses}$$

c) $$\frac{A\left(\frac{3}{4}\right)}{B\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{2 \cdot 10^5\,(1{,}6)^{\frac{3}{4}}}{4 \cdot 10^5\,(0{,}4)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2}\,4^{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 1$$

18 (UFSM-RS) A solução da equação exponencial $5^x(5^x - 1) = 20$:

a) pertence ao intervalo $(-\infty, -3[$

b) pertence ao intervalo $]4, +\infty)$

x c) pertence ao intervalo $]0, 2[$

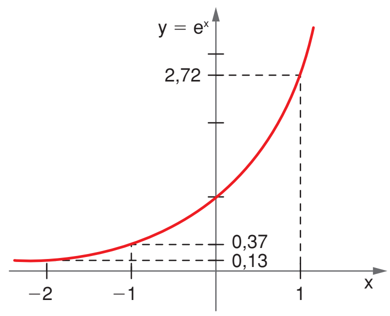
d) é um número par

e) é um número irracional

Substituindo $5^x = y$, vem:
$y(y - 1) = 20 \rightarrow y^2 - y - 20 = 0$ → $y_1 = 5$; $y_2 = -4$

Se $y = 5 \rightarrow 5^x = 5 \rightarrow x = 1$
Se $y = -4 \rightarrow 5^x = -4 \rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$
Como x = 1, pertence ao intervalo]0, 2[

19 (UERJ) Uma empresa acompanha a produção diária de um funcionário recém-admitido, utilizando uma função f(d), cujo valor corresponde ao número mínimo de peças que a empresa espera que ele produza em cada dia (d), a partir da data de sua admissão.
Considere o gráfico auxiliar abaixo, que representa a função $y = e^x$.



Utilizando $f(d) = 100 - 100 \cdot e^{-0{,}2d}$ e o gráfico acima, a empresa pode prever que o funcionário alcançará a produção de 87 peças num mesmo dia, quando *d* for igual a:

a) 5 x b) 10 c) 15 d) 20

Pelos dados, temos:
$f(d) = 87 \rightarrow 100 - 100 \cdot e^{-0{,}2d} = 87$
$e^{-0{,}2d} = 0{,}13$
Pelo gráfico, temos $e^{-2} = 0{,}13$. Logo:
$e^{-0{,}2d} = e^{-2} \rightarrow -0{,}2d = -2$
$d = \frac{-2}{-0{,}2}$
d = 10 dias

20 (UFF-RJ) Em um meio de cultura especial, a quantidade de bactérias, em bilhões, é dada pela função *Q* definida, para $t \geqslant 0$, por $Q(t) = k5^{kt}$, sendo *t* o tempo, em minuto, e *k* uma constante.
A quantidade de bactérias, cuja contagem inicia-se com o cálculo de Q(0), torna-se, no quarto minuto, igual a 25Q(0).
Assinale a opção que indica quantos bilhões de bactérias estão presentes nesse meio de cultura no oitavo minuto.

a) 12,5 b) 25 x c) 312,5 d) 625 e) 1 000

Pelos dados, temos:
se $t = 0 \rightarrow Q(0) = k \cdot 5^0 = k$
se $t = 4 \rightarrow Q(4) = k \cdot 5^{4k}$
Como $Q(4) = 25 \cdot Q(0)$, vem:
$k \cdot 5^{4k} = 25 \cdot k \rightarrow 5^{4k} = 25$
$5^{4k} = 5^2$
$4k = 2$
$k = \frac{1}{2}$

Portanto: $Q(8) = \frac{1}{2} \cdot 5^{\frac{1}{2} \cdot 8} \rightarrow Q(8) = \frac{1}{2} \cdot 5^4$
Q(8) = 312,5

21 (UMC-SP) O crescimento de uma cultura de bactérias obedece à função $N(t) = 600 \cdot 3^{kt}$, em que N é o número de bactérias no instante t, sendo t o tempo em horas. A produção tem início em $t = 0$. Decorridas 12 horas há um total de 1 800 bactérias. O valor de k e o número de bactérias, após 24 horas do início da produção, são, respectivamente:

a) $\frac{1}{12}$ e 3 600

b) $-\frac{1}{12}$ e -100

c) $-\frac{1}{12}$ e 64

d) 12 e 5 400

X e) $\frac{1}{12}$ e 5 400

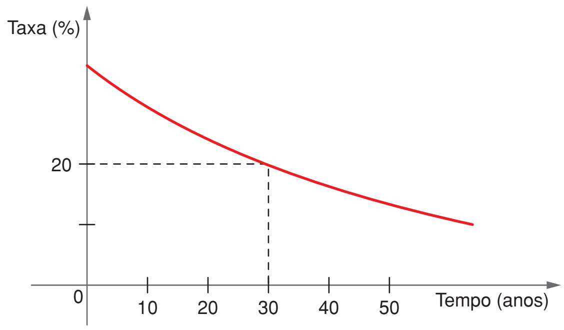
Quando $t = 12$ h, temos:

$1\,800 = 600 \cdot 3^{k \cdot 12} \rightarrow 3^{12k} = 3 \rightarrow 12k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{12}$

Quando $t = 24$ h, obtemos:

$N(24) = 600 \cdot 3^{\frac{1}{12} \cdot 24} \rightarrow N(t) = 600 \cdot 3^2 \rightarrow N(t) = 5\,400$ bactérias

22 (UNI-RIO/Ence-RJ) Conforme dados obtidos pelo IBGE, relativos às taxas de analfabetismo da população brasileira de 15 anos ou mais, a partir de 1960, foi possível ajustar uma curva de equação $y = 30k^x + 10$, onde $k > 0$, representada a seguir:



a) Determine o valor de k.

b) Obtenha as taxas relativas aos anos de 1960 e 2020 (valor estimado), usando o gráfico e a equação anterior.

a) Sendo $x = 30$ e $y = 20$, temos:

$20 = 30 \cdot k^{30} + 10 \rightarrow k^{30} = \frac{1}{3} \rightarrow k = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{\frac{1}{3}}$

b) O ano de 1960 corresponde a $x = 0$. Logo:

$y = 30 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{30}}\right]^0 + 10 \rightarrow y = 30 \cdot 1 + 10 \rightarrow y = 40\%$

O ano de 2020 corresponde a $2020 - 1960 = 60$. Logo:

$y = 30 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{30}}\right]^{60} + 10 \rightarrow y = 30 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \rightarrow y = \frac{40}{3} \simeq 13{,}33\%$

23 (UEPG-PR) Dadas as funções definidas por

$f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$, é correto afirmar que:

(01) os gráficos de f(x) e g(x) não se interceptam.

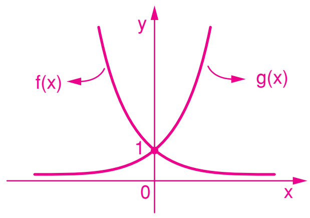
(02) f(x) é crescente e g(x) é decrescente.

(04) $g(-2) \cdot f(-1) = f(1)$

(08) $f[g(0)] = f(1)$

(16) $f(-1) + g(1) = \frac{5}{2}$

Fazendo o gráfico das funções, temos:



(01) Falso, pois os gráficos se interceptam em:

$\left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^x \rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = \left[\left(\frac{4}{5}\right)^x\right]^{-1}$

Substituindo: $\left(\frac{4}{5}\right)^x = y$, vem:

$y = y^{-1} \rightarrow y = \frac{1}{y}$

$y^2 = 1$

$y = \pm 1$

Se $y = 1 \rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

$\left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{5}\right)^0$

$x = 0$

Se $y = -1 \rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = -1$

$\nexists\, x \in \mathbb{R}$

Os gráficos se interceptam em (0, 1).

(02) Falso, pois f(x) é decrescente e g(x) é crescente.

(04) $g(-2) = \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{16}{25}$

$f(-1) = \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{5}{4}$

$f(1) = \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{4}{5}$

Logo: $g(-2) \cdot f(-1) = \frac{16}{25} \cdot \frac{5}{4} = \frac{4}{5} = f(1)$

A proposição é verdadeira.

(08) $g(0) = \left(\frac{5}{4}\right)^0 = 1$

$f(1) = \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{4}{5}$

A proposição é verdadeira.

(16) $g(1) = \left(\frac{5}{4}\right)^1 = \frac{5}{4}$

Logo:

$f(-1) + g(1) = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

A proposição é verdadeira.

Portanto: 04 + 08 + 16 = 28

24 (Unicamp-SP) Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função: $F(t) = a \cdot 2^{-bt}$, onde a variável *t* é dada em anos e *a* e *b* são constantes.

a) Encontre as constantes *a* e *b* de modo que a população inicial ($t = 0$) seja igual a 1 024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial.

b) Qual o tempo mínimo para que a população se reduza a $\frac{1}{8}$ da população inicial?

c) Esboce o gráfico da função $F(t)$ para $t \in [0, 40]$.

Pelos dados do exercício, temos:

a) Para $t = 0 \to F(0) = a \cdot 2^{-b \cdot 0} = 1\,024 \to a = 1\,024$ (I)

Para $t = 10 \to F(10) \to a \cdot 2^{-b \cdot 10} = \frac{1\,024}{2} = 512$ (II)

Subtituindo (I) em (II), vem:

$1\,024 \cdot 2^{-10b} = 512 \to 2^{-10b} = 2^{-1} \to b = \frac{1}{10}$

b) Pelos dados, temos $F(t) = \frac{1}{8} \cdot 1\,024 = 128$

$1\,024 \cdot 2^{-\frac{1}{10}t} = 128$

$2^{\frac{-t}{10}} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$

$\frac{-t}{10} = -3$

$t = 30$ anos

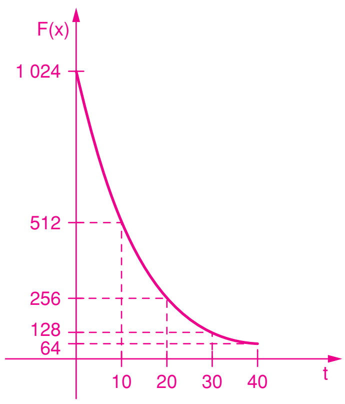
c) Pelos dados, temos:

$F(10) = 512$

$F(20) = 1\,024 \cdot 2^{-\frac{1}{10} \cdot 20} = 256$

$F(40) = 1\,024 \cdot 2^{-\frac{1}{10} \cdot 40} = 64$

O gráfico de F(t) no intervalo [0, 40] é:



25 (UFCE) Sejam *f* e *g* funções reais de variável real definidas por $f(x) = \frac{17}{2^x + 1}$ e $g(x) = 3 + 2x - x^2$. O valor mínimo de $f(g(x))$ é:

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ x d) 1 e) 2

Temos $f(g(x)) = \frac{17}{2^{g(x)} + 1}$. Assim, quanto maior for o valor de $2^{g(x)} + 1$, menor será o valor de $f(g(x))$. Logo $f(g(x))$ assumirá um valor mínimo quando $2^{g(x)} + 1$ assumir um valor máximo, o que ocorrerá quando $g(x)$ assumir um valor máximo. Como $g(x) = 3 + 2x - x^2$, trata-se de uma função quadrática e, como o coeficiente de x^2 é negativo, seu gráfico é uma parábola com concavidade para baixo e, portanto, ela assumirá um valor máximo, o qual ocorrerá quando o valor de *x* for igual à abscissa do vértice, isto é, quando $x = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1$. Assim $g(1)$ é o valor máximo assumido pela função *g* e, portanto, o valor mínimo da composta será

$f(g(1)) = \frac{17}{2^{g(1)} + 1} = \frac{17}{2^4 + 1} = \frac{17}{17} = 1$

26 (Unipac-MG) A relação $P = 32\,000 \cdot (1 - 2^{-0,1t})$ descreve o crescimento de uma população *P* de bactérias, *t* dias após o instante 0. O valor de *P* é superior a 31 000 se, e somente se, *t* satisfizer à condição:

x a) $t > 50$ c) $t > 16$ e) $32 < t < 64$
b) $t < 30$ d) $2 < t < 16$

Devemos ter $P > 31\,000$. Logo:

$32\,000(1 - 2^{-0,1t}) > 31\,000 \to 32(1 - 2^{-0,1t}) > 31$

$32 - 32 \cdot 2^{-0,1t} > 31$

$-32 \cdot 2^{-0,1t} > -1$

$32 \cdot 2^{-0,1t} < 1$

$2^{-0,1t} < \frac{1}{32}$

$2^{-0,1t} < 2^{-5}$

$-0,1t < -5$

$t > 50$ dias

27 (ITA-SP) Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 1$. O conjunto de todas as soluções reais da inequação $a^{2x(1-x)} > a^{x-1}$ é:

a) $]-1, 1[$
d) $]-\infty, 1[$
b) $]1, +\infty[$
e) vazio
x c) $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[$

Se $a \in \mathbb{R}$ com $a > 1$, então:
$a^{2x(1-x)} > a^{x-1} \Leftrightarrow 2x(1-x) > x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 1$

O conjunto solução é, pois, $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[$

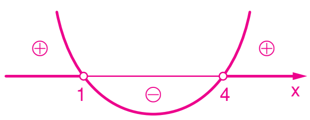
28 (FERJ-SC) A solução da inequação $(0{,}7)^{x(x-3)} < (0{,}49)^{x-2}$ é:

a) $\varnothing$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } > 3\}$
x e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

$(0{,}7)^{x(x-3)} < (0{,}49)^{x-2} \rightarrow (0{,}7)^{x^2-3x} < (0{,}7)^{2x-4}$
$x^2 - 3x > 2x - 4$
$x^2 - 5x + 4 > 0$

Estudando o sinal, temos:

$x^2 - 5x + 4 = 0 \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$



Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

29 (UNI-RIO) Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em gramas, que decresce em função do tempo *t*, em horas, de acordo com a fórmula $m = -3^{2t} - 3^{t+1} + 108$. Assim sendo, o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar este material antes que ele se volatilize totalmente é:

a) inferior a 15 minutos.
b) superior a 15 minutos e inferior a 30 minutos.
c) superior a 30 minutos e inferior a 60 minutos.
d) superior a 60 minutos e inferior a 90 minutos.
x e) superior a 90 minutos e inferior a 120 minutos.

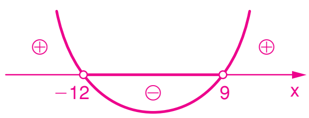
Para que o material se volatilize totalmente, temos $m > 0$, logo:
$-3^{2t} - 3^{t+1} + 108 > 0$

Aplicando as propriedades de potência, temos:
$-(3^t)^2 - 3^t \cdot 3^1 + 108 > 0$

Substituindo $3^t = y$, temos:
$-y^2 - 3y + 108 > 0 \rightarrow y^2 + 3y - 108 < 0$

Resolvendo a equação $y^2 + 3y - 108 = 0 \begin{cases} y' = -12 \\ y'' = 9 \end{cases}$

Analisando o sinal, temos:



logo, $-12 < y < 9$

Voltando na inequação inicial, temos:
$-12 < 3^t < 9$

Logo:
$3^t > -12\ (\forall\, t \in \mathbb{R})$
e
$3^t < 9 \rightarrow 3^t < 3^2 \rightarrow t < 2$ h ou $t < 120$ min

30 (UFOP-MG) Determine o domínio da função:

$$f(x) = \sqrt{8^x - \frac{1}{8}}.$$

Devemos ter:
$8^x - \frac{1}{8} \geqslant 0 \rightarrow 8^x \geqslant \frac{1}{8}$
$8^x \geqslant 8^{-1}$
$x \geqslant -1$

31 (ECM-AL) O conjunto de todos os valores de x para os quais $1 \leqslant 4^{\frac{x}{4}} < 8^2$ é:

x a) [0, 12[
b) [0, 8[
c) [0, 6[
d) [0, 4[
e) [0, 3[

$1 \leqslant 4^{\frac{x}{4}} < 8^2$

$\underbrace{1 \leqslant 4^{\frac{x}{4}}}_{\text{II}}\quad \underbrace{4^{\frac{x}{4}} < 8^2}_{\text{I}}$

$\begin{cases} 4^{\frac{x}{4}} < 8^2 & \text{(I)} \\ 4^{\frac{x}{4}} \geqslant 1 & \text{(II)} \end{cases}$

(I) $4^{\frac{x}{4}} < 8^2 \rightarrow (2^2)^{\frac{x}{4}} < (2^3)^2$

$2^{\frac{x}{2}} < 2^6$

$\frac{x}{2} < 6$

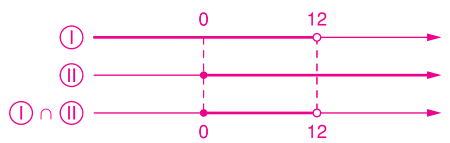
$x < 12$

(II) $4^{\frac{x}{4}} \geqslant 1 \rightarrow 4^{\frac{x}{4}} \geqslant 4^0$

$\frac{x}{4} \geqslant 0$

$x \geqslant 0$

Fazendo a intersecção, temos:



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 12\} = [0, 12[$

32 (UESPI) Seja S o conjunto solução da inequação $\left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} > \left(\frac{4}{3}\right)^{2x+4}$. Então:

a) $S = \mathbb{R}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R}: x < 7\}$
x c) $S = \{x \in \mathbb{R}: x < -7\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R}: x > 2\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R}: x < 1\}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} > \left(\frac{4}{3}\right)^{2x+4} \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-2x-4}$

$3 - x < -2x - 4$

$-x + 2x < -4 - 3$

$x < -7$

33 (UFF-RJ)

a) Ao resolver uma questão, José apresentou o seguinte raciocínio:

"Como $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ tem-se $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$ e conclui-se que $2 > 3$."

Identifique o erro que José cometeu em seu raciocínio, levando-o a essa conclusão absurda.

b) Sem cometer o mesmo erro que José, determine o menor número m, inteiro e positivo, que satisfaz à inequação:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{m}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{m+1}$$

a) José cometeu o erro na última etapa de seu raciocínio, uma vez que a função exponencial dada por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é decrescente, ou seja, à medida que aumentamos o valor de x, o valor de f(x) diminui.

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{m}} > \left(\frac{1}{4}\right)^{m+1} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{m}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2m+2}$

Como a base $\left(\frac{1}{2}\right)$ é um número compreendido entre zero e um, a função é decrescente e o sinal da desigualdade muda, ou seja:

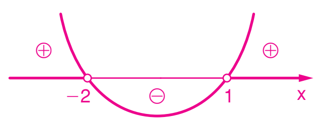
$\frac{4}{m} < 2m + 2 \rightarrow \frac{4}{m} - 2m - 2 < 0$

$\frac{4 - 2m^2 - 2m}{m} < 0$

$\frac{2m^2 + 2m - 4}{m} > 0$

$\frac{2(m - 1)(m + 2)}{m} > 0$

Como $m > 0$, temos $\frac{2(m-1)(m+2)}{m} > 0 \rightarrow (m - 1)(m + 2) > 0$, ou seja, $m < -2$ ou $m > 1$.



Conclui-se que o menor número inteiro e positivo m que satisfaz a inequação é 2.