Geometria de Posição

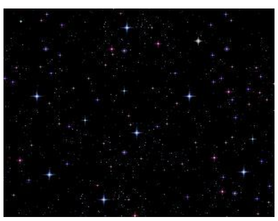
Conceitos primitivos

Conceitos primitivos

- A partir do mundo real, matemáticos da antiguidade, como Euclides (séc. III a.C.) estabeleceram entes com os quais construíram a geometria. Três desses entes destacam-se por serem conhecidos intuitivamente. São eles: **o ponto, a reta e o plano.**

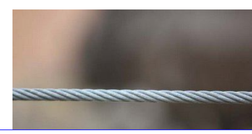
O Ponto

- Olhando-se a noite para um céu estrelado vêem-se as estrelas, que, intuitivamente, podem ser consideradas ***pontos***. Em geometria, o ponto, elemento concebido sem dimensão, massa nem volume, é uma noção primitiva.



A Reta

- Suponha agora que fosse possível esticar, indefinidamente e nos dois sentidos, um fio de elástico. Em nossa imaginação, e apenas nela, visualizaríamos o que chamamos de ***reta***. Em geometria, o conceito de reta – concebido intuitivamente – também é uma noção primitiva.



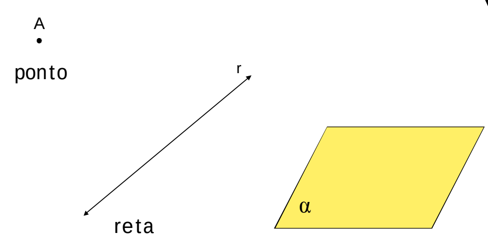
Uma reta é um conjunto de infinitos pontos.

O Plano

- Considere o tampo liso de uma mesa, sem nenhum tipo de fresta ou ondulação. Esse tampo possibilitaria a visualização concreta de um *plano*. Entretanto, o conceito geométrico de plano implica que, por intuição, ele seja entendido ilimitadamente em todas as direções. Plano é uma noção primitiva.

Um plano é um conjunto de infinitos pontos.

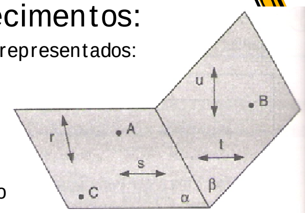
- Representando os conceitos de modo geométrico, temos, então:



- A proposição usada por Hilbert (1862 – 1943), e normalmente adotada por nós, é a seguinte:
  - Os pontos são indicados por letras maiúsculas (A, B, C etc.).
  - As retas são indicadas por letras minúsculas (r, s, t etc.).
  - Os planos são indicados por letras gregas (α,β,γ etc.).

Vamos testar os nossos conhecimentos:

Na figura ao lado aparecem representados:



a) quantos pontos? Quais são eles?

b) Quantas retas? Quais são elas?

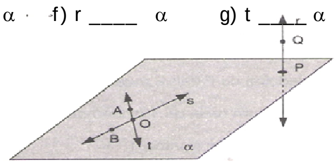
c) Quantos planos? Quais são eles?

Em geometria a reta e o plano são imaginados como **conjuntos de pontos**, estando, por isso, sujeitos à notação da teoria de conjuntos.
Assim relacionamos ponto e reta com os símbolos $\in$ *ou* $\notin$.
Ponto e plano também com os símbolos $\in$ *ou* $\notin$.
Reta e plano com os símbolos $\subset$ *ou* $\not\subset$.

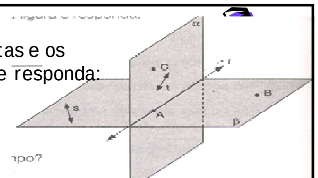
Utilizando os símbolos de pertinência e de inclusão determine as relações abaixo:

a) P _____ α b) Q _____ r c) s ______ d) B ______ α

e) Q _____ α f) r _____ α g) t _____ α h) A _____



Considere os pontos, as retas e os planos indicados na figura e responda:



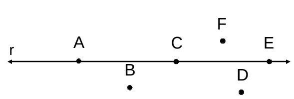
a) Quais são os planos?
b) Quais os pontos que pertencem aos planos β e α?
c) Quais as retas contidas no plano β?
d) Quais as retas contidas no plano α?
e) Há algum ponto que pertence aos dois planos ao mesmo tempo?Qual?
f) Há alguma reta contida nos dois planos ao mesmo tempo? Qual?

Posições primitivas, postulados ou axiomas.

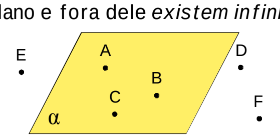
Postulados da existência

P1 – Existem infinitos pontos

P2 – Em uma reta e fora dela *existem infinitos* pontos

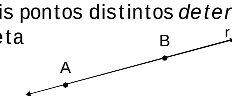


P3 – Em um plano e fora dele *existem infinitos* pontos

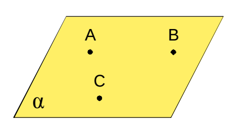


Postulados da determinação

P4 – Dois pontos distintos *determinam* uma única reta

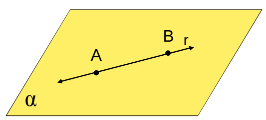


P5 – Três pontos não-colineares *determinam* um único plano



Postulado da inclusão

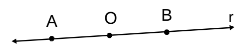
P6 – Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, a reta está contida (está inclusa) nesse plano



$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \in \alpha \\ A \in r \\ A \in r \end{array}\right\} r \subset \alpha$$

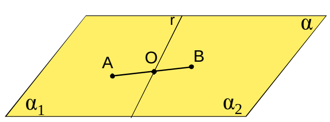
Postulados da separação

P7 – *Postulado da separação da reta* : todo ponto de uma reta, separa-a em duas partes às quais ela pertence.



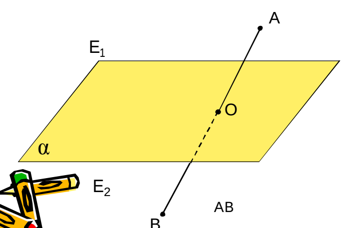
$\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semi-retas opostas de origem O.

P8 – *Postulado da separação* : toda reta de um plano separa-o em duas partes na quais ela está contida; qualquer segmento de reta com um extremo em cada parte e nenhuma nesta reta de separação intercepta-a em um único ponto.



α_1 e α_2 são semi - planos opostos de α.

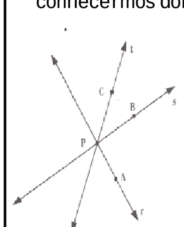
P9 – *Postulado da separação* :Todo plano *separa* o espaço em duas partes nas quais ele está contido; qualquer segmento de reta com um extremo em cada parte e nenhum nesse plano de separação intercepta-o em um único ponto.



E_1 e E_2 são semi-espaços opostos de origem α

2. O ESTUDO DA RETA

Para determinar (ou caracterizar) uma reta, basta conhecermos dois pontos distintos.



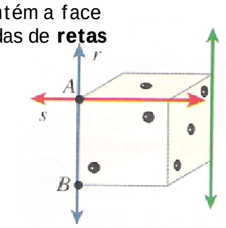
Os pontos **P** e **A** caracterizam a reta **r**.
Indica-se por **r = PA.**
Os pontos **P e B** caracterizam a reta **s**.
Indica-se por **s = PB.**

Os pontos **P** e **C** caracterizam a reta **t**.
Indica-se por **t= PC.**

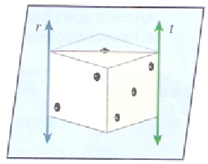
2.2 Posição de retas

Observe os dados representados abaixo.

- As retas **r** e **s** são **concorrentes** e indicamos *r X s*.
- r e s estão no mesmo plano que contém a face dois do dado e, por isso, são chamadas de **retas coplanares.**

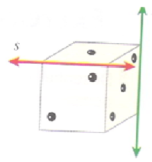


As retas **t** e **r** **são coplanares**

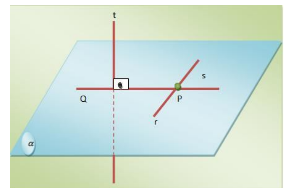


- **t** e **r** não tem pontos em comum, são chamadas de **retas paralelas** e indicamos por r//t.

- t e s não estão no mesmo plano. Por isso, são chamadas de **retas reversas.**



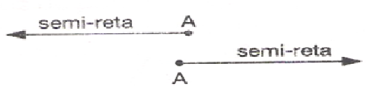
As retas **s** e **r** **são perpendiculares** pois estão no mesmo plano.
Já as retas **t** e **s** **são ortogonais** pois estão em planos diferentes.



2.3 Subconjuntos da retas

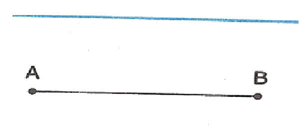
- **Semi-reta**

Quando tomamos, em uma reta **r**, um ponto A, esta fica dividida em dois subconjuntos r_1 e r_2. Esses subconjuntos são chamados de **semi-retas**

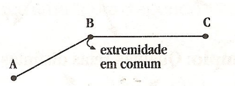


Segmento de reta

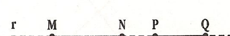
- O subconjunto da reta formado pelos pontos **A** e **B** e todos os pontos entre A e B chama-se de **segmento de reta AB.**



Dois segmentos são **consecutivos** quando possuem em comum só uma extremidade: **AB** e **BC**.



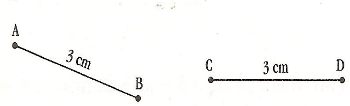
Dois segmentos são **colineares** quando possuem a mesma reta suporte: **MN** e **PQ.**



- Dois segmentos são **adjacentes** quando são consecutivos e colineares: **EF** e **FG.**

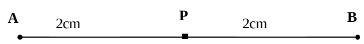
Segmentos congruentes

- Quando dois segmentos tem a mesma medida, tomada na mesma unidade, esses segmentos são chamados **segmentos congruentes**.



2.4 Ponto médio de um segmento

- Um ponto P, interno a um segmento AB, é chamado **ponto médio** desse segmento se P divide AB em dois segmentos congruentes.

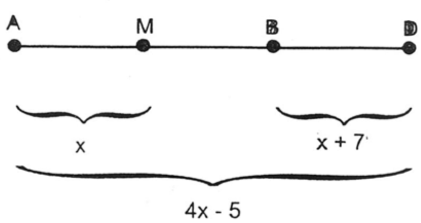


- Então, se P é ponto médio de AB, temos AP = PB.

01. Assinale as proposições verdadeiras:

(01) Por um ponto passam infinitas retas.
(02) Por três pontos dados passam uma só reta.
~~(04)~~ Se dois pontos distintos de uma reta pertencem a um plano, então a reta está contida nesse plano.
(08) Por dois pontos distintos passa uma reta.
F (16) Três pontos distintos são sempre colineares.
(32) Duas retas distintas que têm um ponto comum são concorrentes.
(64) Quatro pontos distintos são sempre coplanares.

02. Determine AB, sendo M ponto médio de $\overline{AB}$:



- (UFMS - 2010) Questão 1
- A seguir foram feitas afirmações sobre geometria espacial, assinale a(s) correta(s).
- (001) Toda reta paralela a dois planos, não paralelos, é paralela à interseção deles.
- (002) Toda reta que contém dois pontos de um plano pertence a esse plano.
- (004) A partir de quatro pontos não coplanares, são definidos exatamente quatro planos distintos.
- (008) Três retas concorrentes num único ponto definem um único plano.
- (016) Toda reta perpendicular a duas retas não paralelas pertence ao plano definido por essas duas retas não paralelas.

001 + 002 + 004 = 007

(001) Correta. Se uma reta r é paralela a dois planos α e β, então r não intercepta nenhum dos pontos pertencentes a α ou β. Assim, r não intercepta a reta interseção de α e β, sendo r, portanto, paralela à reta interseção de α e β.
(002) Correta. Por dois pontos quaisquer de um plano passa uma e somente uma reta. Se dois pontos pertencem a um plano, a reta que os contém também pertence a esse plano.
(004) Correta. Para definir um plano, são necessários três pontos. Havendo quatro pontos, é possível definir $C_{4,3} = 4$ planos distintos.
(008) Incorreta. Considere o sistema de eixos coordenados x, y, z. Os eixos são retas concorrentes num único ponto. Porém, definem o plano xy, o plano yz e o plano xz.
(016) Incorreta. Novamente, usaremos o exemplo do sistema de eixos coordenados x, y, z. Os eixos x e y são retas não paralelas. E o eixo z é uma reta perpendicular a elas. No entanto, z não pertence ao plano xy.

- (UFPR - 2009) Questão 2 - Com base nos conhecimentos de geometria plana, considere as seguintes afirmativas:

1. Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.
2. Quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe uma reta a, tal que A ∈ a e B ∈ a.
3. Se dois segmentos são consecutivos, então eles são adjacentes.
4. Se um segmento paralelo a um lado de um triângulo tem uma extremidade no ponto médio de um lado e a outra extremidade no outro lado, então esta extremidade é ponto médio do terceiro lado.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as afirmativas 3 e 4 são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas 2, 3 e 4 são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.
d) Somente as afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.
e) Somente as afirmativas 1, 2 e 4 são verdadeiras.

E

As afirmativas 1, 2 e 4 se baseiam em premissas da geometria plana, portanto são verdadeiras.

A afirmativa 3 é falsa, pois dois segmentos podem ser consecutivos sem serem adjacentes. Por exemplo, dois lados de um triângulo são sempre consecutivos, mas não são adjacentes (colineares com um único ponto em comum).

2) Sejam A, B, C, D e E cinco pontos de uma reta, sucedendo-se nessa ordem, de forma que B é o ponto médio de AC e D é o ponto médio de CE. Se BC = x, CD = c + 2 e AE = 20cm, calcule **X**.

3) Sejam A, B, C, D e E cinco pontos colineares, marcados nessa ordem, tais que B é o ponto médio de AC e D é o ponto médio de CE. Sabendo que CD = 2BC e AE = 90, calcule **AB**.

4) AB e BC são dois segmentos adjacentes tais que AB = x e BC = y. Sendo M o ponto médio de AB e N o ponto médio de BC pede-se MN.