EXERCÍCIOS 7.6

Encontrando Limites

Nos exercícios 1–6, use a Regra de l'Hôpital para calcular o limite. Depois, calcule o limite usando um método estudado no Capítulo 1.

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 5x}{x}$

3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x}{7x^2+1}$

4. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{4x^3-x-3}$

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

6. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x}{x^3+x+1}$

Aplicando a Regra de l'Hôpital

Use a Regra de l'Hôpital para encontrar os limites dos exercícios 7–38.

7. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\text{sen } \theta^2}{\theta}$

8. $\lim_{\theta\to\pi/2} \dfrac{1-\text{sen } \theta}{1+\cos 2\theta}$

9. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\cos t-1}{e^t-t-1}$

10. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t-1}{\ln t-\text{sen } \pi t}$

11. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$

12. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log_2 x}{\log_3 (x+3)}$

13. $\lim_{y\to 0^+} \dfrac{\ln(y^2+2y)}{\ln y}$

14. $\lim_{y\to\pi/2} \left(\dfrac{\pi}{2}-y\right) \text{tg } y$

15. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$

16. $\lim_{x\to\infty} x \text{ tg } \dfrac{1}{x}$

17. $\lim_{x\to 0^+} (\text{cosec } x-\text{cotg } x+\cos x)$

18. $\lim_{x\to\infty} (\ln 2x-\ln(x+1))$

19. $\lim_{x\to 0^+} (\ln x-\ln \text{sen } x)$

20. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

21. $\lim_{x\to 0} (e^x+x)^{1/x}$

22. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

23. $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x-5}{2x^2-x+2}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 7x}{\text{tg } 11x}$

25. $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x}$

26. $\lim_{x\to\infty} (1+2x)^{1/(2\ln x)}$

27. $\lim_{x\to 1} (x^2-2x+1)^{x-1}$

28. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} (\cos x)^{\cos x}$

29. $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x}$

30. $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$

31. $\lim_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^x$

32. $\lim_{x\to 0^+} (\text{sen } x)^{\text{tg } x}$

33. $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

34. $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

35. $\lim_{x\to\infty} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt$

36. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x\ln x}\displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$

37. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta-1}{e^\theta-\theta-1}$

38. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{e^t+t^2}{e^t-t}$

Teoria e Aplicações

A Regra de l'Hôpital não ajuda a encontrar os limites dos exercícios 39–42. Tente; você voltará sempre ao mesmo ponto. Encontre os limites de outra maneira.

39. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$

40. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{\text{sen } x}}$

41. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{\sec x}{\text{tg } x}$

42. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\text{cotg } x}{\text{cosec } x}$

43. *Escrevendo para aprender* Qual está correto e qual está errado? Justifique suas respostas.

(a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \lim_{x\to 3} \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{6}$

(b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-3} = \dfrac{0}{6} = 0$

44. *Forma ∞/∞* Dê um exemplo de duas funções deriváveis f e g com $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ que satisfaçam as condições a seguir.

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

45. *Escrevendo para aprender: extensão contínua* Calcule um valor de c que faça com que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9x-3\text{ sen } 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

seja contínua em $x = 0$. Explique por que o seu valor de c funciona.

46. *A Regra de l'Hôpital* Seja

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(a) Mostre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 \quad \text{mas} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2.$$

(b) *Escrevendo para aprender* Explique por que isso não contradiz a Regra de l'Hôpital.

47. *Juros capitalizados continuamente*

(a) Mostre que

$$\lim_{k\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = A_0e^{rt}.$$

(b) *Escrevendo para aprender* Explique como o limite da parte (a) relaciona os juros capitalizados k vezes por ano com os juros capitalizados continuamente.

48. *Forma 0/0* Estime o valor de

$$\lim_{x\to1} \frac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$$

traçando o gráfico. Então, confirme sua estimativa pela Regra de l'Hôpital.

49. *Forma 0/0*

(a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to1} \frac{(x-1)^2}{x\ln x - x - \cos \pi x}$$

traçando o gráfico de $f(x) = (x-1)^2/(x \ln x - x - \cos \pi x)$ próximo a $x = 1$. Depois, confirme sua estimativa pela Regra de l'Hôpital.

(b) Trace o gráfico de f para $0 < x \le 11$.

50. *Por que 0^∞ e $0^{-\infty}$ não são formas indeterminadas* Presuma que $f(x)$ não é negativa em um intervalo aberto contendo c e que $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

(a) Se $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, mostre que $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = 0$.

(b) Se $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$, mostre que $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \infty$.

51. *Precisão gráfica* Seja

$$f(x) = \frac{1-\cos x^6}{x^{12}}.$$

Explique por que alguns gráficos de f podem fornecer informações falsas sobre $\lim_{x\to0} f(x)$. (*Dica:* Tente a janela $[-1, 1]$ por $[-0{,}5, 1]$.)

52. Forma $\infty - \infty$

(a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2+x})$$

traçando o gráfico de $f(x) = x - \sqrt{x^2+x}$ em um intervalo suficientemente grande de valores de x.

(b) Agora confirme sua estimativa encontrando o limite pela Regra de l'Hôpital. Como primeiro passo, multiplique $f(x)$ pela fração $(x+\sqrt{x^2+x})/(x+\sqrt{x^2+x})$ e simplifique o novo numerador.

53. *Funções exponenciais*

(a) Use a equação

$$a^x = e^{x\ln a}$$

para encontrar o domínio de

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

(b) Encontre $\lim_{x\to-1^-} f(x)$.

(c) Encontre $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

54. *Exponenciais expandidas* Dado que $x > 0$, encontre, caso exista, o valor máximo de

(a) $x^{1/x}$

(b) x^{1/x^2}

(c) x^{1/x^n} (sendo n um inteiro positivo)

(d) Mostre que $\lim_{x\to\infty} x^{1/x^n} = 1$ para qualquer inteiro positivo n.

55. *O lugar de ln x entre as potências de x* O logaritmo natural

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$

preenche a lacuna no conjunto de fórmulas

$$\int t^{k-1}\,dt = \frac{t^k}{k} + C, \qquad k \ne 0,$$

mas as fórmulas em si não mostram até que ponto o logaritmo se encaixa bem aí. Podemos verificar graficamente isso se selecionarmos as primitivas específicas

$$\int_1^x t^{k-1}\,dt = \frac{x^k-1}{k}, \qquad x > 0,$$

e compararmos seus gráficos com o gráfico de ln x.

(a) Trace o gráfico da função $f(x) = (x^k - 1)/k$ junto ao gráfico de ln x no intervalo $0 \le x \le 50$ para $k = \pm1, \pm0{,}5, \pm0{,}1$ e $\pm0{,}05$.

(b) Mostre que

$$\lim_{k\to0} \frac{x^k-1}{k} = \ln x.$$

(*Fonte:* "The place of ln x among the powers of x" de Henry C. Finlayson, *American Mathematical Monthly*, v. 94, n. 5, maio 1987, p. 450.)

56. *A expansão contínua de $(\text{sen } x)^x$ para $[0, \pi]$*

(a) Trace o gráfico de $f(x) = (\text{sen } x)^x$ no intervalo $0 \le x \le \pi$. Qual valor você atribuiria a f para que ela fosse contínua em $x = 0$?

(b) Verifique sua conclusão do item (a) encontrando $\lim_{x\to0^+} f(x)$ com a Regra de l'Hôpital.

(c) Voltando ao gráfico, estime o valor máximo de f em $[0, \pi]$. Aproximadamente onde está máx f?

(d) Melhore sua estimativa do item (c) fazendo o gráfico de f' na mesma janela para ver onde ele cruza o eixo x. Para simplificar seu trabalho, você pode querer retirar o fator exponencial da expressão de f' e representar graficamente apenas o fator que tem um zero.

(e) Melhore ainda mais a sua estimativa da localização de máx f resolvendo numericamente a equação $f' = 0$.

(f) Estime máx f calculando f nos locais que você encontrou nos itens (c), (d) e (e). Qual é seu melhor valor para máx f?